

Verzweigungslasten und Eigenformen seitlich gestützter Biegeträger unter Berücksichtigung der Drehbettung

In DIN 18800 und im EC 3 wird das ideale Biegedrillknickmoment als Bezugsgröße für den Tragsicherheitsnachweis biegedrillknickgefährdeter Träger verwendet [1]. Dabei ist es aus wirtschaftlichen Gründen vorteilhaft, die stabilisierende Wirkung angrenzender Bauteile zu berücksichtigen. In diesem Beitrag wird über die Ermittlung von M_{Ki} für am Obergurt seitlich gehaltene Stahlträger berichtet, die zusätzlich durch eine Drehbettung stabilisiert werden. Darüber hinaus wird auf die zugehörigen Eigenformen eingegangen, da sie für Nachweise unter Ansatz von geometrischen Ersatzimperfektionen benötigt werden. Als Ergänzung zu Berechnungen mit Hilfe von EDV-Programmen wird auch ein Näherungsverfahren zur Ermittlung von M_{Ki} vorgestellt, das für die Handrechnung geeignet ist.

Critical loads and modal shapes of lateral supported beams taking into account torsional restraints. The design for lateral buckling according to DIN 18800 and EC 3 is based on the elastic critical bending moment [1]. For an economic design it is necessary to consider the stabilizing effects of adjacent structural members. This paper deals with the determination of M_{Ki} for steel girders with lateral support at the top flange and consideration of additional torsional restraint. Furthermore the corresponding modal shapes are treated because they are required for verifications with assumption of equivalent geometrical imperfections. As supplement to the determination of M_{Ki} by use of computer programme an approximation method is proposed, which is suitable for the practicable design.

1 Einleitung

Als einführendes Beispiel wird der in Bild 1 dargestellte Zweifeldträger betrachtet, der aus einem Walzprofil IPE 300 besteht und in beiden Feldern durch eine Gleichstreckenlast q_z am Obergurt belastet wird. Ohne stabilisierende Maßnahmen ergibt sich eine sehr kleine kritische Streckenlast von 2,40 kN/m. Im Fall b ($c_\vartheta = 6$ kNm/m) ist die Verzweigungslast mit 7,38 kN/m deutlich größer, obwohl für die Drehbettung nur ein relativ geringer Wert angesetzt wurde, der hier die Wirkung von querverlaufenden Stahltrapezprofilen auf dem Obergurt erfassen soll.

Bei den Fällen c und d ist der Obergurt über die gesamte Trägerlänge seitlich unverschieblich gestützt. Ohne Drehbettung erhält man $q_{Ki,z} = 7,59$ kN/m, und mit $c_\vartheta = 6$ kNm/m ergibt sich $q_{Ki,z} = 15,56$ kN/m. Aus dem Vergleich der Fälle d und a ist erkennbar, daß die stabilisierenden Maßnahmen mit ca. 650 % außerordentlich großen Einfluß auf die Verzweigungslasten haben. Bei den Eigenformen dagegen ist der Einfluß nicht so signifikant. Dies ändert sich jedoch, wenn starke Drehbettungen angesetzt werden, worauf in Abschn. 3 näher eingegangen wird.

Die Eigenwerte und Eigenformen für das Beispiel in Bild 1 wurden mit den EDV-Programmen BDK-SPEZIAL und KSTAB2002 (FEM-Programm) berechnet. Sie sind auf

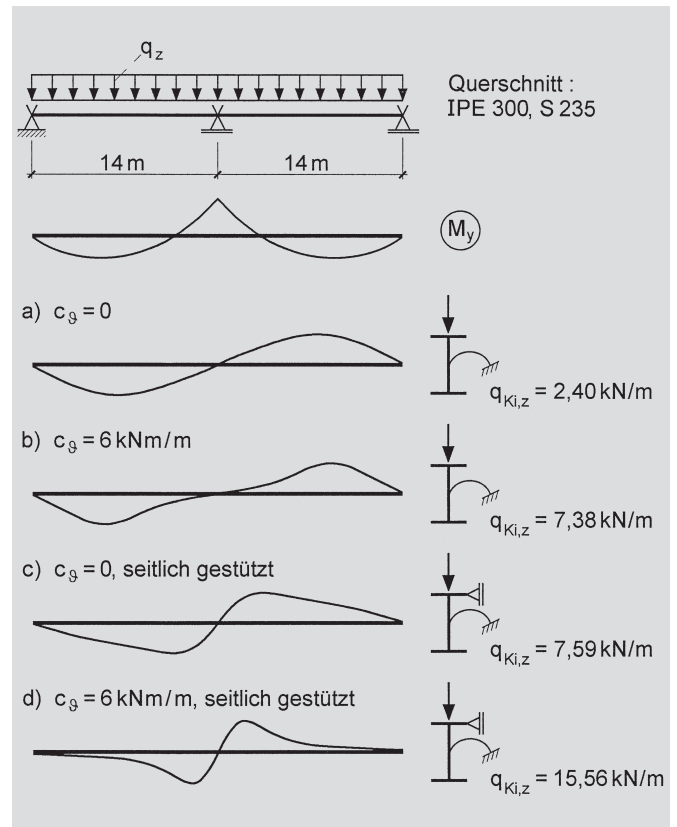


Bild 1. Verzweigungslasten $q_{Ki,z}$ und zugehörige Eigenformen der Verdrehung ϑ für einen Zweifeldträger
Fig. 1. Critical load $q_{Ki,z}$ and corresponding modal shape of the rotation ϑ for a double span beam

der RUBSTAHL-CD „Lehr- und Lernprogramme für Studium und Weiterbildung“ enthalten, die dem Buch *Kindmann/Frickel* [2] beiliegt, und sind somit allgemein verfügbar. Die erwähnten Programme wurden auch für die folgenden und die eingehenden Untersuchungen in [3] verwendet.

Wenn man **Eigenformen** ermitteln möchte, kommt man ohne EDV-Programme nicht aus. Zur Berechnung von **Verzweigungslasten** können, soweit für die vorliegenden Fälle Lösungen vorhanden sind, auch Näherungsverfahren verwendet werden (s. z. B. Abschn. 4). Wie später noch gezeigt wird, kann man bei seitlich gestützten Trägern mit Drehbettungen an die Näherungsverfahren jedoch nicht allzu hohe Erwartungen bezüglich der Genauigkeit stellen. In vielen Anwendungsfällen empfiehlt sich daher auch für die Berechnung von Verzweigungslasten der Einsatz geeigneter EDV-Programme.

Die Untersuchungen des vorliegenden Beitrages beschränken sich auf Träger, die den Fällen c und d in Bild 1 entsprechen, d. h.

- Lastangriff von q_z am Obergurt
- seitliche Stützung am Obergurt
- Drehbettungen c_ϑ (konstante Streckendrehfedern)
- doppelsymmetrische I-Querschnitte (gleichbleibend im gesamten Träger)

Für ausgewählte baustatische Systeme wird in Abschn. 4 ein Näherungsverfahren zur Ermittlung von Verzweigungslasten unter Berücksichtigung der Drehbettung vorgestellt. Schwerpunkt des Beitrages ist jedoch die Klärung der prinzipiellen Zusammenhänge hinsichtlich der Verzweigungslasten und Eigenformen seitlich gestützter Träger. Dazu sei bereits hier erwähnt, daß kein Biegedrillknicken auftreten kann, wenn ausschließlich positive Biegemomente vorhanden sind, da dann der gesamte Druckgurt unverschieblich gehalten ist.

2 Grundlagen zur Ermittlung des Biegedrillknickmomentes $M_{Ki,y}$

Bei Trägern, die durch Streckenlasten q_z , Einzellasten F_z und Randmomente beansprucht werden, treten nach der linearen Stabtheorie ausschließlich Durchbiegungen w auf. Hinzu kommen bei der Betrachtung imperfekter Träger nach Theorie II. Ordnung Durchbiegungen v und Verdrehungen ϑ . Diese Verformungen des Trägers, beispielhaft in Bild 2 dargestellt, bilden auch den Ausgangspunkt für die Untersuchung des Stabilitätsproblems, d. h. für die Ermittlung des Biegedrillknickmomentes $M_{Ki,y}$ und der Eigenform.

Zur Formulierung der Grundgleichungen kann die virtuelle Arbeit verwendet werden. Für doppelsymmetrische I-Querschnitte und $F_z = 0$ erhält man nach *Kindmann/Frickel* [2]:

$$\delta A = \int_x (\delta v'' \cdot EI_z \cdot v'' + \delta \vartheta'' \cdot EI_\omega \cdot \vartheta'' + \delta \vartheta' \cdot GI_T \cdot \vartheta' + \delta v'' \cdot M_y(x) \cdot \vartheta + \delta \vartheta \cdot M_y(x) \cdot v'' + \delta \vartheta \cdot q_z \cdot z_q \cdot \vartheta + \delta \vartheta \cdot c_\vartheta \cdot \vartheta) \cdot dx \tag{1}$$

Zur Ermittlung der Verzweigungslast werden die Beanspruchungen q_z und M_y solange vergrößert, bis indifferentes Gleichgewicht auftritt. Der zugehörige Faktor für q_z und M_y ist der Verzweigungslastfaktor η_{Ki} des Systems. M_y und q_z in Gl. (1) sind daher für diesen Fall durch

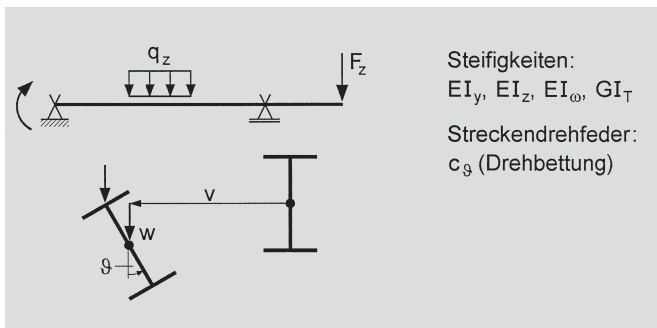


Bild 2. Träger mit planmäßig einachsiger Biegung und Verformungen w , v und ϑ

Fig. 2. Beam with nominal bending about one axis and deformations v , w , ϑ

$$\eta_{Ki} \cdot M_y(x) \text{ und } \eta_{Ki} \cdot q_z$$

zu ersetzen. Für die Parameter EI_z , EI_ω , GI_T und c_ϑ wird hier vorausgesetzt, daß sie im gesamten Träger konstant sind.

Im Hinblick auf weitere Vereinfachungen wird von Bild 3 ausgegangen.

q_z greift vereinbarungsgemäß am Obergurt an, und es ist $z_q = -a_g/2$. Darüber hinaus soll der Obergurt über die gesamte Trägerlänge seitlich unverschieblich gestützt sein. Unter dieser Voraussetzung kann die Verformung v in Gl. (1) mit

$$v = -\vartheta \cdot a_g/2 \tag{2}$$

gemäß Bild 3 eliminiert werden. Als Grundgleichung für das Indifferenzkriterium erhält man dann:

$$\delta A = \int_x \left[\delta \vartheta'' \cdot (EI_z \cdot a_g^2/4 + EI_\omega) \cdot \vartheta'' + \delta \vartheta' \cdot GI_T \cdot \vartheta' + \delta \vartheta \cdot c_\vartheta \cdot \vartheta - \eta_{Ki} \cdot a_g/2 \cdot (\delta \vartheta'' \cdot M_y(x) \cdot \vartheta + \delta \vartheta \cdot M_y(x) \cdot \vartheta'' - \delta \vartheta \cdot q_z \cdot \vartheta) \right] \cdot dx \tag{3}$$

Unter dieser Voraussetzung tritt in Gl. (3) nur noch die Verformungsfunktion ϑ auf. $\vartheta(x)$ muß die Eigenform des baustatischen Systems sein, da dies die notwendige Bedingung für die Erfüllung des Indifferenzkriteriums ist. Zum Vergleich sei hier das Stabilitätsproblem Biegeknicken erwähnt, bei dem die Eigenform häufig als Knickbiegeline bezeichnet wird und Verformungen $w(x)$ bzw. $v(x)$ auftreten.

Bei doppelsymmetrischen I-Querschnitten kann die Beziehung

$$I_\omega = I_z \cdot a_g^2/4 \tag{4}$$

verwendet werden. Wenn man I_z in Gl. (3) ersetzt, erhält man:

$$\delta A = \int_x (\delta \vartheta'' \cdot 2 EI_\omega \cdot \vartheta'' + \delta \vartheta' \cdot GI_T \cdot \vartheta' + \delta \vartheta \cdot c_\vartheta \cdot \vartheta) \cdot dx - \eta_{Ki} \cdot \frac{a_g}{2} \times \int_x (\delta \vartheta'' \cdot M_y(x) \cdot \vartheta + \delta \vartheta \cdot M_y(x) \cdot \vartheta'' - \delta \vartheta \cdot q_z \cdot \vartheta) \cdot dx \tag{5}$$

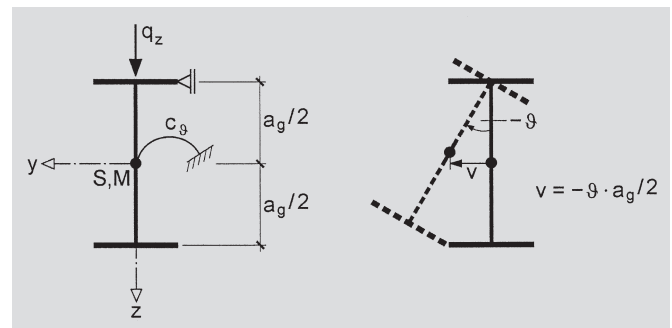


Bild 3. Seitlich gestützter Querschnitt mit q_z und c_ϑ sowie Verformungen v und ϑ

Fig. 3. Lateral supported beam with q_z and c_ϑ as well as deformations v and ϑ

3 M_{Ki} und Eigenformen gabelgelagerter Träger für ausgewählte Lastfälle

3.1 Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt wird für ausgewählte baustatische Systeme gezeigt, welchen Einfluß unterschiedliche Momentenverläufe, Querschnittswerte und die Drehbettung auf M_{Ki} und die zugehörigen Eigenformen haben. Zur Berechnung wurden die EDV-Programme BDK-SPEZIAL und KSTAB2002 (FEM-Programm) verwendet. Da mit EI_ω, GI_T, c_ϑ, dem Momentenverlauf sowie den Abmessungen und Randbedingungen des baustatischen Systems relativ viele Parameter eingehen, wird vorab der beidseitig gabelgelagerte Träger mit konstantem Momentenverlauf betrachtet. Er dient zur Feststellung der prinzipiellen Zusammenhänge und Identifikation der freien Parameter des Problems, die nicht unmittelbar erkennbar sind. Wesentliches Ziel ist eine **profilunabhängige Darstellung mit dimensionslosen Parametern**.

3.2 Gabelgelagerte Träger mit konstantem Momentenverlauf

Für den Träger in Bild 4 mit konstantem Momentenverlauf ist die Eigenform bekannt. Wie beim elastisch gebettetem Druckstab oder bei einer rechteckigen Platte unter Drucknormalspannungen ist die genaue Lösung des Eigenwertproblems die Sinusfunktion, die in einer oder mehreren Wellen auftreten kann. Im vorliegenden Fall hat daher die zur Eigenform gehörige Verdrehung folgenden Funktionsverlauf:

$$\vartheta(x) = C \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

bzw. (6)

$$\delta\vartheta(x) = \delta C \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

mit n = 1, 2, 3, ... (ganzzahlig).

Mit der hier vorliegenden Eigenform sind die Integrale in Gl. (5) leicht zu lösen. Neben den jeweils konstanten Vorfaktoren ergibt sich in allen Fällen ℓ/2, und man erhält folgende Bestimmungsgleichung für den Verzweigungslastfaktor

$$\eta_{Ki} \cdot M_y \cdot \frac{a_g}{2} \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{\ell} + \frac{n^4 \cdot \pi^4}{\ell^3} \cdot EI_\omega + \frac{n^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot \ell} \cdot GI_T + \frac{\ell}{2} \cdot c_\vartheta = 0. \quad (7)$$

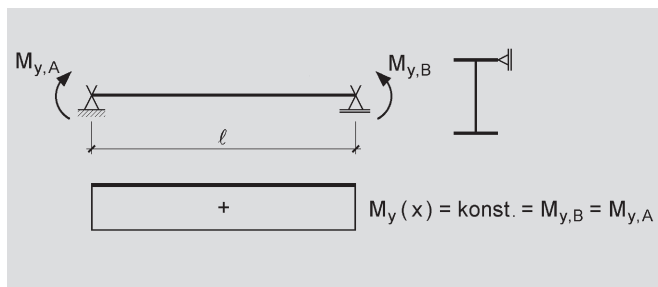


Bild 4. Beidseitig gabelgelagerter Träger mit konstantem Momentenverlauf

Fig. 4. Beam with simple torsional support and constant moment distribution

Da

$$M_{Ki,y} = \eta_{Ki} \cdot M_y \quad (8)$$

ist, kann das Biegedrillknickmoment nur negative Werte annehmen. Damit wird der bekannte Zusammenhang bestätigt, daß kein Biegedrillknicken auftritt, wenn der Druckgurt eines Trägers über die gesamte Länge seitlich unverrückbar gehalten wird. Der Betrag des Biegedrillknickmomentes ergibt sich mit den Gln. (7) und (8) wie folgt:

$$|M_{Ki,y}| = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{\ell^2} \cdot \frac{EI_\omega}{a_g} \cdot 2 + \frac{GI_T}{a_g} + \frac{\ell^2}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{c_\vartheta}{a_g} \quad (9a)$$

$$= \frac{\pi^2 \cdot EI_\omega}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_\omega = \frac{GI_T}{a_g} \cdot k_T \quad (9b, c)$$

mit

$$k_\omega = 2 \cdot n^2 + \alpha_T + \alpha_T^2 \cdot \delta_c^2 / n^2 = k_T \cdot \alpha_T \quad (10a)$$

$$k_T = 2 \cdot n^2 / \alpha_T + 1 + \alpha_T \cdot \delta_c^2 / n^2 = k_\omega / \alpha_T \quad (10b)$$

$$\alpha_T = \frac{\ell^2 \cdot GI_T}{\pi^2 \cdot EI_\omega}; \quad \delta_c = \frac{\sqrt{c_\vartheta \cdot EI_\omega}}{GI_T} \quad (10c, d)$$

Gl. (9a) zeigt, daß das Biegedrillknickmoment additiv aus drei Anteilen berechnet wird. Zur Lösung wird die Halbwellenzahl n der Sinusfunktion benötigt. Für c_ϑ = 0 ist n = 1, da sich dafür das kleinste Biegedrillknickmoment ergibt. Wenn c_ϑ ≠ 0 ist, kann n iterativ durch Probieren bestimmt werden.

Wie die Gln. (9) und (10) zeigen, gelingt mit den Parametern

$$\alpha_T (\ell, GI_T, EI_\omega) \text{ und } \delta_c (c_\vartheta, GI_T, EI_\omega)$$

eine dimensionslose und damit eine profilunabhängige Darstellung. Bild 5 enthält eine Auswertung für δ_c = 0, 1 und 2, wobei k_T nach Gl. (10b) für M_{Ki} nach Gl. (9c) über α_T aufgetragen ist. Für δ_c ≠ 0 ergeben sich – vergleichbar mit den Beulgirlanden beim Plattenbeulen – Hyperbeln, die jeweils **bereichsweise** maßgebend sind. Wie man sieht, kann als Näherung eine horizontale Gerade und für kleine α_T die Lösung nach Gl. (10b) für n = 1 verwendet werden. Man erhält dann:

$$\alpha_T \leq \sqrt{2}/\delta_c: k_T = 2/\alpha_T + 1 + \alpha_T \cdot \delta_c^2 \quad (11a)$$

$$\alpha_T > \sqrt{2}/\delta_c: k_T = 1 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \delta_c \quad (11b)$$

Die Näherung mit Gl. (11) liegt bereichsweise relativ weit auf der sicheren Seite, wobei die größten Abweichungen im Schnittpunkt der Hyperbeln für n = 1 und n = 2 auftreten. Dort ist

$$\alpha_T = 2 \cdot \sqrt{2}/\delta_c \text{ und } k_{T,1/2} = 1 + 2,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \delta_c. \quad (12a)$$

Analog ergibt sich für n = 2 und n = 3

$$\alpha_T = 6 \cdot \sqrt{2}/\delta_c \text{ und } k_{T,2/3} = 1 + 13/6 \cdot \sqrt{2} \cdot \delta_c. \quad (12b)$$

In Tabelle 1 wird die Näherung nach Gl. (11b) mit den vorstehenden genauen Lösungen verglichen. Maximal kann

Tabelle 1. Vergleich der Näherung (Geradengleichung) mit der genauen Lösung für k_T

Table 1. Comparison of the approximation (linear equation) with the exact result

δ_c	Wellen 1 und 2		Wellen 2 und 3	
	α_T	Vergleich	α_T	Vergleich
1	2,828	84,4 %	8,485	94,2 %
2	1,414	82,5 %	4,243	93,4 %
3	0,943	81,7 %	2,828	93,1 %
4	0,707	81,3 %	2,121	92,9 %
5	0,566	81,1 %	1,697	92,8 %

die Näherung mit der Geradengleichung (s. a. Bild 5) 20 % auf der sicheren Seite liegen.

Ergänzend zu Bild 5 ist in Bild 6 der Faktor $k_\omega = k_T \cdot \alpha_T$ zur Ermittlung von M_{Ki} mit Hilfe von Gl. (9b) dargestellt. Vorteilhaft ist dabei, daß sich für $\delta_c = 0$ eine Gerade ergibt. Für $\delta_c \neq 0$ können ebenfalls wie in Bild 5 als Näherungen Geraden verwendet werden. Sie liegen

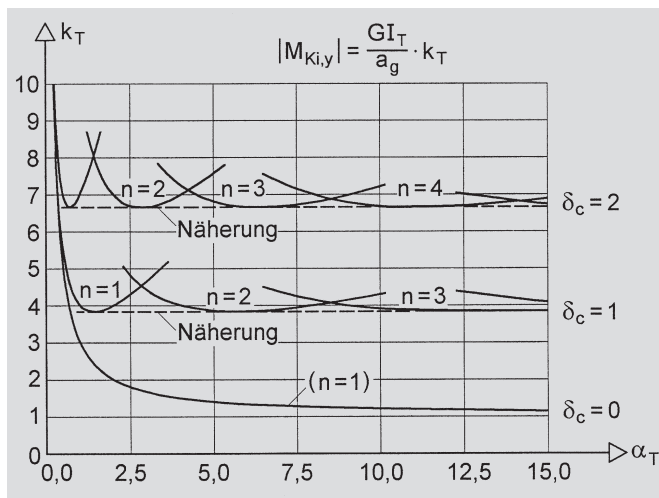


Bild 5. Faktor k_T zur Ermittlung von M_{Ki} für konstanten Biegemomentenverlauf

Fig. 5. Factor k_T to determine M_{Ki} for constant bending moment distribution

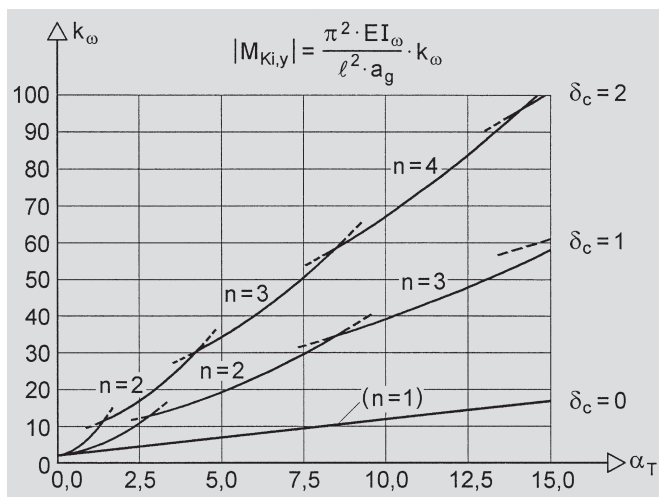


Bild 6. Faktor k_ω zur Ermittlung von M_{Ki} für konstanten Biegemomentenverlauf

Fig. 6. Factor k_ω to determine M_{Ki} for constant bending moment distribution

jedoch nicht wie in Bild 5 horizontal, sondern weisen eine vom Parameter δ_c abhängige Neigung auf.

Das baustatische System gemäß Bild 4 mit $M_y(x) = \text{konst.}$ wurde hier relativ ausführlich behandelt, obwohl es in der Baupraxis kaum vorkommt. Aufgrund der profilunabhängigen Darstellung und Erkennen der prinzipiellen Zusammenhänge hat es für die folgenden Belastungsfälle (Abschn. 3.3 und 3.4) und die Näherungslösungen in Abschn. 4 große Bedeutung.

3.3 Gleichstreckenlast und Randmomente

3.3.1 Symmetrische Momentenzustandslinien

Das in Abschn. 3.2 behandelte baustatische System mit $M_y(x) = \text{konst.}$ weist eine symmetrische Momentenzustandslinie auf. Ergänzend dazu wird bei dem System in Bild 4 eine Gleichstreckenlast q_z hinzugefügt. Im Verhältnis zu den Randmomenten wird

$$M_{y,0} = q_z \cdot \ell^2 / 8 = -M_{y,B} = -M_{y,A} \tag{13}$$

gewählt.

Zur Ermittlung der Verzweigungslast werden die in Abschn. 1 erwähnten EDV-Programme eingesetzt [2] und das Ergebnis in Bild 7 für den Fall $\delta_c = 0$, d. h. $c_\vartheta = 0$, dargestellt. Dabei wird von Gl. (9b) für M_{Ki} ausgegangen und der Faktor k_ω mit Bezug auf das **Randmoment** angegeben:

$$|M_{Ki,y,B}| = \frac{\pi^2 \cdot EI_\omega}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_\omega \tag{14}$$

Im Gegensatz zu der Geraden in Bild 6 ergibt sich in Bild 7 eine leicht gekrümmte Linie. Der Faktor k_ω (und damit M_{Ki}) ist natürlich größer als für den konstanten Momentenverlauf. Zu dem Fall in Bild 7 gehören Eigenformen, die sich mit dem Parameter α_T , in den die Stablänge eingeht, verändern. Bild 8 zeigt dazu vier ausgewählte Fälle. Bei kurzen Trägern entspricht die Eigenform recht genau einer Sinushalbwellen. Sie wird mit wachsender Länge immer flacher, so daß bei sehr großen Stablängen im Feldbereich fast ein gradliniger Verlauf auftritt. Die Eigenform ist stets **einwellig**.

Es wird nun eine Drehbettung hinzugefügt und $\delta_c = 1,54$ angenommen. Dies entspricht bei einem Walzprofil IPE 360 (Beispiel) einem c_ϑ von 33,2 kNm/m. Die einge-

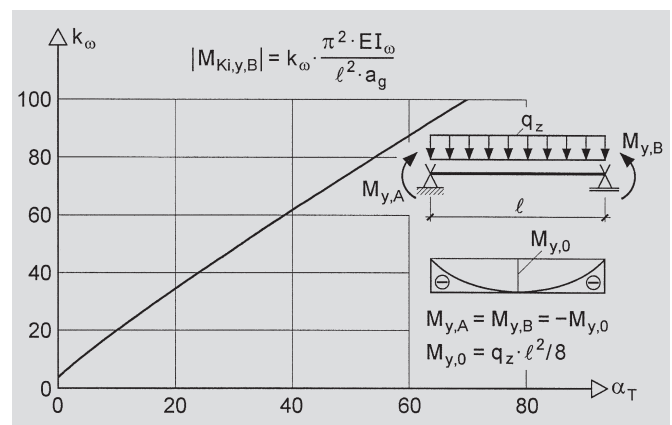


Bild 7. Faktor k_ω für $M_{y,A} = M_{y,B} = -M_{y,0}$ und $\delta_c = 0$

Fig. 7. Factor k_ω for $M_{y,A} = M_{y,B} = -M_{y,0}$ and $\delta_c = 0$

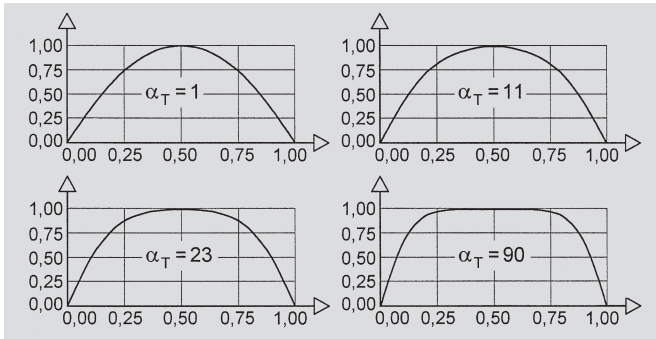


Bild 8. Ausgewählte Eigenformen für das System in Bild 7
Fig. 8. Selected modal shapes for the system in fig. 7

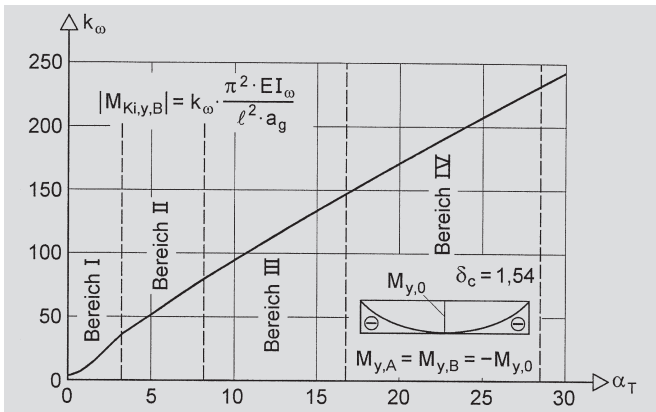


Bild 9. Faktor k_ω für $M_{y,A} = M_{y,B} = -M_{y,0}$ und $\delta_c = 1,54$
Fig. 9. Factor k_ω for $M_{y,A} = M_{y,B} = -M_{y,0}$ and $\delta_c = 1,54$

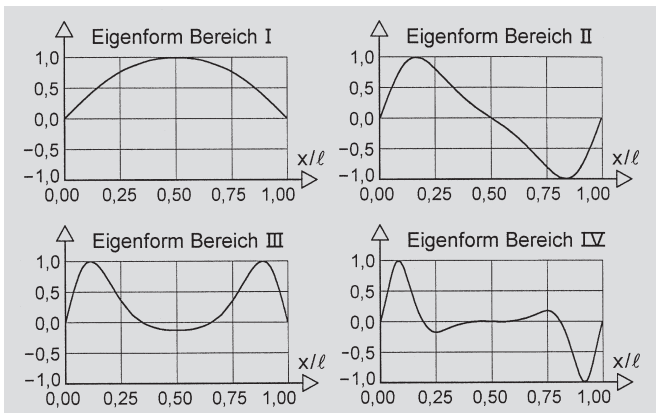


Bild 10. Eigenformen für das System in Bild 9
Fig. 10. Modal shapes for the system in fig. 9

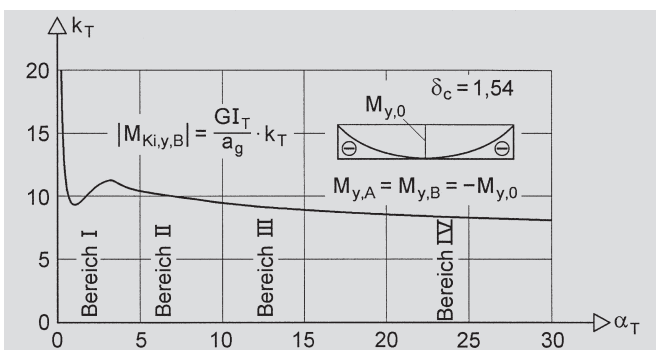


Bild 11. Faktor k_T für $M_{y,A} = M_{y,B} = -M_{y,0}$ und $\delta_c = 1,54$
Fig. 11. Factor k_T for $M_{y,A} = M_{y,B} = -M_{y,0}$ and $\delta_c = 1,54$

hende Untersuchung des Systems zeigt, daß sich die Eigenformen mit Vergrößerung der Trägerlänge signifikant verändern. Bis α_T von etwa 28 treten gemäß Bild 9 vier Bereiche auf, in denen die Eigenformen völlig unterschiedlich sind. Wie Bild 10 zeigt, wechseln sie stets von einer symmetrischen in eine antisymmetrische Eigenform und umgekehrt. Wenn man die Stablänge bzw. α_T noch weiter vergrößert, ergeben sich ähnliche Eigenformen wie für die Bereiche III und IV.

Die Amplituden an den Trägerenden sind dann jedoch ausgeprägter, und im Feldbereich ist die Verdrehung ϑ näherungsweise gleich Null. Bei *Muszkiewicz* in [3] finden sich dazu vertiefende Untersuchungen. Der Kurvenverlauf für k_ω in Bild 9 weist mehr oder minder ausgeprägte Knicke auf. Sie sind schwächer als für $M_y(x) = \text{konst.}$ in Bild 6, aber dennoch beim Übergang von Bereich I zu Bereich II gut erkennbar. Noch besser werden die Unstetigkeitsstellen sichtbar, wenn man den Faktor $k_T = k_\omega / \alpha_T$ für M_{K_i} nach Gl. (9c) über α_T aufträgt. Bild 11 zeigt ein ausgeprägtes Minimum im Bereich I. Der Knick zwischen I und II ist hier im Vergleich zu Bild 5 ausgerundet, weil die Linie in Bild 11 mit einer begrenzten Anzahl von Rechenergebnissen erzeugt wurde. Mit wachsendem α_T sind die Knicke zwischen den Bereichen so klein, daß sie nicht erkennbar sind.

3.3.2 Unsymmetrische Momentenzustandslinien

Als Beispiel für eine unsymmetrische Momentenzustandslinie wird das System in Bild 12 betrachtet. Am linken Trägerende ist das Randmoment $M_{y,A} = 0$. Für die Streckenlast q_z gilt wie in Abschn. 3.3.1:

$$M_{y,0} = q_z \cdot \ell^2 / 8 = -M_{y,B} \tag{15}$$

Bild 12 zeigt für vier ausgewählte Werte von α_T und $\delta_c = 1,2$ die Eigenformen. Da die Biegedrillknickgefahr vom **negativen** Biegemoment am rechten Trägerende ausgeht, hat dort die Eigenform ihre größte Amplitude. Im Feldbereich ist sie deutlich geringer und ist vom linken Trägerende bis zur Feldmitte bei großen Trägerlängen (großes α_T) fast gleich Null. Diese Tendenz zeigt sich auch, wenn man von einer bestimmten Trägerlänge ausgeht und δ_c , d. h. c_ϑ , anwachsen läßt.

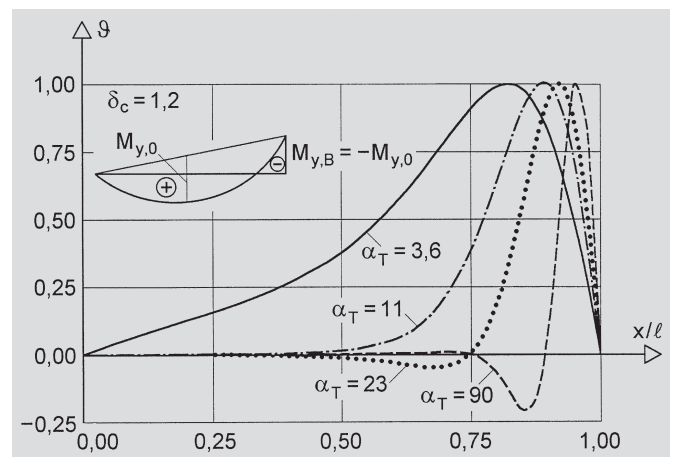


Bild 12. Ausgewählte Eigenformen für $M_{y,A} = 0$, $M_{y,B} = -M_{y,0}$ und $\delta_c = 1,2$
Fig. 12. Selected modal shapes for $M_{y,A} = 0$, $M_{y,B} = -M_{y,0}$ and $\delta_c = 1,2$

Für den Faktor k_ω zur Ermittlung von $M_{K_{i,y,B}}$ ergibt sich ein ähnlicher Verlauf wie in Bild 9 für die symmetrische Momentenzustandslinie. Da bei der unsymmetrischen Zustandslinie nur am rechten Trägerende **negative** Biegemomente auftreten, ist die Biegedrillknickgefahr geringer als beim symmetrischen Fall, und der Faktor k_ω ist größer als in Bild 9 eingetragen.

4 Näherungslösungen

4.1 Allgemeines

In Abschn. 4 werden Näherungslösungen für ausgewählte Einfeld- und Durchlaufträger sowie für beidseitig gabelgelagerte Träger unter Biegebeanspruchung infolge Gleichstreckenlast und Randmomenten angegeben. Bei der Formulierung der Berechnungsformeln wird auf die in Abschn. 3 gewonnenen Erkenntnisse, d. h. auf die Formeln für den konstanten Momentenverlauf in Abschn. 3.2 und die Kurvenverläufe in Abschn. 3.3, zurückgegriffen. Zur Ermittlung von M_{K_i} wird von Gl. (9b)

$$|M_{K_{i,y,B}}| = \frac{\pi^2 \cdot EI_\omega}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_\omega \quad (16)$$

ausgegangen und für den Faktor k_ω entsprechende Näherungen angegeben. Für Träger ohne Drehbettung zeigen Gl. (10a) und die Bilder 6 und 7, daß bereichsweise Geradengleichungen

$$k_\omega = a + b \cdot \alpha_T \quad (17)$$

als gute Näherungen verwendet werden können. Zur Berücksichtigung einer Drehbettung, also $\delta_c \neq 0$, können die Gln. (10a) und (11) sowie die Bilder 6 und 9 herangezogen werden. Daraus ergibt sich, daß sinnvolle Näherungen z. B. in der Form

$$k_\omega = a + b \cdot \alpha_T + d \cdot \alpha_T^2 \cdot \delta_c^2 \text{ für kleine } \alpha_T \text{ und } \quad (18a)$$

$$k_\omega = a + b \cdot \alpha_T + c \cdot \alpha_T \cdot \delta_c \text{ für große } \alpha_T \quad (18b)$$

möglich sind.

Die Entwicklung von Näherungslösungen wurde von *Muszkiewicz* in [3] eingehend untersucht. Dort wurde festgestellt, daß mit dem Ansatz

$$k_\omega = a + b \cdot \alpha_T + c \cdot \alpha_T \cdot \delta_c + d \cdot \delta_c \quad (19)$$

für viele Anwendungsfälle brauchbare Näherungen beschrieben werden können. Dieser Ansatz wird daher hier übernommen. Außerdem wird auch der Gültigkeitsbereich der Parameter von

$$0,1 \leq \alpha_T \leq 80 \text{ und } \delta_c \leq 5$$

übernommen, wobei α_T bei baupraktischen Fällen überwiegend zwischen 5 und 20 liegt und δ_c häufig kleiner als 2 ist.

Anmerkungen zu den Parametern α_T und δ_c

Der Parameter α_T nach Gl. (10c) eignet sich besonders gut zur Erfassung des vorliegenden Problems. Zu vergleichbaren Parametern in der Literatur bestehen folgende Zusammenhänge:

– Stabkennzahl ε_T für Torsion [2]

$$\varepsilon_T = \ell \cdot \sqrt{\frac{GI_T}{EI_\omega}} = \pi \cdot \sqrt{\alpha_T} \quad (20)$$

– Abklingfaktor λ

$$\lambda = \sqrt{\frac{GI_T}{EI_\omega}} = \frac{\varepsilon_T}{\ell} = \frac{\pi}{\ell} \cdot \sqrt{\alpha_T} \quad (21)$$

– Parameter χ [9], [10]

$$\chi = \frac{EI_\omega}{\ell^2 \cdot GI_T} = \frac{1}{\varepsilon_T^2} = \frac{1}{\pi^2 \cdot \alpha_T} \quad (22)$$

Die Drehbettung c_ϑ wird in [7] durch den Parameter

$$\eta_B = \sqrt{\frac{c_\vartheta \cdot \ell^4}{EI_{\omega D}}} \quad (23)$$

erfaßt. Da hier $I_{\omega D} = 2 \cdot I_\omega$ ist, kann η_B wie folgt durch α_T und δ_c ersetzt werden:

$$\eta_B = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \cdot \alpha_T \cdot \delta_c \quad (24)$$

Näherung mit einem ideellen Torsionsträgheitsmoment

In der Literatur wird häufig vorgeschlagen, den Einfluß der Drehbettung durch die Verwendung eines ideellen Torsionsträgheitsmomentes I_T^* zu erfassen, siehe z. B. [5], [11], [12]. Dabei wird das tatsächliche Torsionsträgheitsmoment wie folgt vergrößert

$$I_T^* = I_T + c_\vartheta \cdot \frac{\ell^2}{\pi^2 \cdot G} \quad (25)$$

Diese Vorgehensweise führt bei der Formulierung, die im vorliegenden Beitrag gewählt wurde, zu einem Faktor

$$k_\omega = a + b \cdot (\alpha_T + \alpha_T^2 \cdot \delta_c^2) \quad (26)$$

und steht in engem Zusammenhang mit den Gln. (10a), (11a) und (18a). Aus dem Vergleich mit Gl. (11a) ergibt sich, daß Gl. (26) die genaue Lösung für den Träger mit **konstantem Momentenverlauf** darstellt, sofern

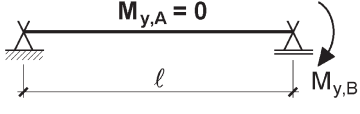
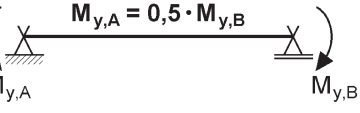
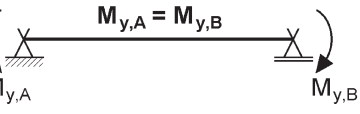
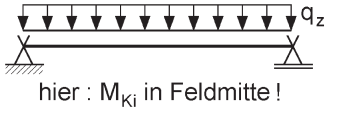
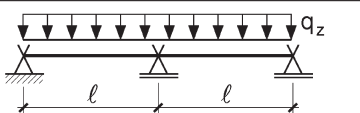
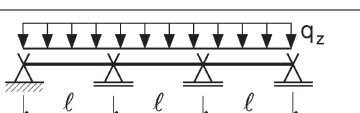
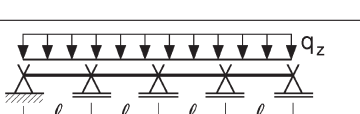
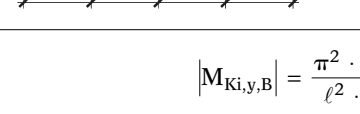
$$\alpha_T \cdot \delta_c \leq \sqrt{2}$$

ist ($a = 2, b = 1$, siehe Tabelle 3). Da dazu als Eigenform die **einwellige Sinusfunktion** gehört, können Näherungen mit Gl. (25) bzw. (26) nur dann zu brauchbaren Ergebnissen führen, wenn damit die Eigenform ausreichend genau angenähert wird. Dies ist bei baupraktischen Anwendungen aber eher selten der Fall (siehe z. B. Bilder 10 und 12), so daß die Näherung mit Gl. (25) häufig zu völlig falschen Ergebnissen auf der unsicheren Seite führt. Auf diesen Sachverhalt wird auch in [3], [7], [8], [9] hingewiesen.

4.2 Ausgewählte Einfeld- und Durchlaufträger

Tabelle 2 enthält Beiwerte zur näherungsweise Ermittlung des Biegedrillknickmomentes für einige ausgewählte baustatische Systeme (Drehbettung $c_\vartheta = 0$). Bei den Einfeldträgern

Tabelle 2. Beiwerte zur Ermittlung von M_{Ki} für ausgewählte Einfeld- und Durchlaufträger (gebundene Drehachse Mitte OG, $c_{\vartheta} = 0$)
Table 2. Coefficients to determine M_{Ki} of selected single span and continuous beams (lateral supported at the top flange, $c_{\vartheta} = 0$)

Baustatisches System	$\alpha_T \leq 10$		$\alpha_T > 10$	
	a	b	a	b
	3,99	1,57	7,06	1,27
	2,79	1,30	4,00	1,18
	2,00	1,00	2,00	1,00
	$M_{Ki} \rightarrow \infty$		$M_{Ki} \rightarrow \infty$	
	Auflast			
	Sog	4,40	1,77	9,30
	Auflast	12,38	2,46	20,43
	Sog	17,03	3,33	26,28
	Auflast	8,29	2,16	14,33
	Sog	10,90	2,27	16,95
	Auflast	8,64	2,40	16,11
	Sog	12,56	2,53	19,28
$ M_{Ki,y,B} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\omega}}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_{\omega} \text{ mit } k_{\omega} = a + b \cdot \alpha_T; \quad \alpha_T = \frac{\ell^2 \cdot GI_T}{\pi^2 \cdot EI_{\omega}}$				

mit Randmomenten werden nur **negative** Randmomente betrachtet, wobei sich die drei Fälle nur hinsichtlich $M_{y,A}$ unterscheiden. Beim dritten Fall tritt wegen $M_{y,A} = M_{y,B}$ ein konstanter Momentenverlauf (negativ!) auf, so daß die Beiwerte $a = 2$ und $b = 1$ gemäß Abschn. 3.2 die genaue Lösung sind. Alle drei Fälle weisen im **gesamten Träger negative** Biegemomentenverläufe auf. Positive Biegemomente (im gesamten Träger!) brauchen nicht untersucht zu werden, da dann keine Biegedrillknickgefahr auftritt.

Dieser Sachverhalt wird auch beim Einfeldträger mit einer Belastung durch q_z als Auflast deutlich. Da der gesamte Druckgurt seitlich unverschieblich abgestützt wird, kann kein Biegedrillknicken auftreten. Im Gegensatz zu allen anderen Fällen gelten die Beiwerte für die Sogbelastung zur Ermittlung von $M_{Ki,y}$ in Feldmitte, also korrespondierend zu $M_y = q_z \cdot \ell^2/8$. Ansonsten wird stets der Betrag von $M_{Ki,y,B}$ ermittelt. Bezugsmoment ist also stets das Biegemoment $M_{y,B}$, wobei damit wie üblich, das Stützmoment an der ersten Innenstütze von links bezeichnet wird.

Die baustatischen Systeme in Tabelle 3 sind mit Tabelle 2 identisch. Einziger Unterschied ist die Erfassung einer Drehbettung $c_{\vartheta} \neq 0$, wobei nun wie in Abschn. 4.1 erläutert jeweils vier Beiwerte (a bis d) verwendet werden. Die beim Einfeldträger mit konstantem Momentenverlauf ($M_{y,A} =$

$M_{y,B}$) etwas abweichende Lösungsstruktur folgt aus den Bildern 5 und 6 sowie Gl. (11) und der Beziehung $k_{\omega} = k_T \cdot \alpha_T$.

Wenn das Produkt $\alpha_T \cdot \delta_c$ sehr klein ist, können sich nach Tabelle 3 teilweise kleinere Faktoren k_{ω} ergeben als nach Tabelle 2 für $\delta_c = 0$. Dies ist eine Ungenauigkeit, die sich aus dem in Abschn. 4.1 gewählten Ansatz ergibt. Es kann natürlich der größere Faktor k_{ω} nach Tabelle 2 zur Ermittlung von M_{Ki} verwendet werden.

Ergänzend sei hier noch erwähnt, daß in [10] Diagramme zur Ermittlung von M_{Ki} für $c_{\vartheta} = 0$ enthalten sind, siehe dort Bilder 2-9.5 bis 2-9.14. Dort werden weitere baustatische Systeme erfaßt, die in dem vorliegenden Beitrag nicht behandelt werden.

4.3 Beidseitig gabelgelagerter Träger mit Randmomenten und Gleichstreckenlasten

Bei Durchlaufträgern mit ungleichen Feldweiten oder teilweise unterschiedlichen Gleichstreckenlasten, aber auch bei ebenen Rahmen, geht man häufig so vor, daß man in mehrere Einfeldträger mit Randmomenten unterteilt. Da man dann für alle Einfeldträger getrennte Biegedrillknicknachweise führt, liegt diese Vorgehensweise auf der sicheren Seite. In Abschn. 5 wird dazu ein Beispiel (Dreifeldträger) vorgeführt.

Tabelle 3. Beiwerte zur Ermittlung von M_{Ki} für ausgewählte Einfeld- und Durchlaufträger (gebundene Drehachse Mitte OG, $c_\vartheta \neq 0$)
Table 3. Coefficients to determine M_{Ki} of selected single span and continous beams (lateral supported at the top flange, $c_\vartheta \neq 0$)

Baustatisches System	$\alpha_T \leq 10$				$\alpha_T > 10$				
	a	b	c	d	a	b	c	d	
	2,51	1,35	3,35	-0,06	4,25	1,17	3,08	2,71	
	1,15	1,16	3,18	-0,06	1,76	1,10	3,00	1,73	
	$\alpha_T \leq \sqrt{2}/\delta_c$: $k_\omega = 2 + \alpha_T + \alpha_T^2 \cdot \delta_c^2$				$\alpha_T > \sqrt{2}/\delta_c$: $k_\omega = \alpha_T + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \alpha_T \cdot \delta_c$				
	Auflast	$M_{Ki} \rightarrow \infty$			$M_{Ki} \rightarrow \infty$				
	Auflast	3,07	1,59	3,17	0,00	7,26	1,17	2,94	2,31
	Sog	10,59	2,06	4,47	-0,07	15,86	1,54	3,52	9,48
	Auflast	14,23	2,84	5,79	-0,09	20,54	2,21	5,28	5,04
	Sog	6,20	1,83	4,75	-0,10	9,87	1,47	3,58	11,57
	Auflast	8,91	1,96	4,05	-0,06	13,17	1,53	3,71	3,27
	Sog	6,84	2,07	4,65	-0,06	12,02	1,55	3,60	10,36
	Auflast	10,28	2,18	4,50	-0,06	15,02	1,71	4,15	3,46
$ M_{Ki,y,B} = \frac{\pi^2 \cdot EI_\omega}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_\omega \text{ mit } k_\omega = a + b \cdot \alpha_T + c \cdot \alpha_T \cdot \delta_c + d \cdot \delta_c; \quad \delta_c = \frac{\sqrt{c_\vartheta \cdot EI_\omega}}{GI_T}$									

Die Tabellen 4 und 5, prinzipiell vergleichbar mit den Tabellen 2 und 3, enthalten Beiwerte zur Ermittlung von $M_{Ki,y,B}$ für gabelgelagerte Einfeldträger mit Randmomenten und Gleichstreckenlasten q_z . Die Randmomente sind stets negativ, wobei drei Fälle unterschieden werden:

- $M_{y,A} = 0$ (oben)
- $M_{y,A} = 0,5 \cdot M_{y,B}$ (Mitte)
- $M_{y,A} = M_{y,B}$ (unten)

Darüber hinaus wird $M_{y,B}$ auf $M_{y,0} = q_z \cdot \ell^2/8$ bezogen und jeweils der Bereich von -0,3 bis -1,0 erfaßt. Ergänzend dazu sind in [3] Beiwerte für zahlreiche weitere Fälle ($M_{y,B}/M_{y,0}$ zwischen -1,0 und -0,3) enthalten.

Wenn das Produkt $\alpha_T \cdot \delta_c$ sehr klein ist, können sich nach Tabelle 5 kleinere Faktoren k_ω ergeben als nach Tabelle 4 für $\delta_c = 0$. Wie schon in Abschn. 4.2 erwähnt, darf dann auch hier der größere Wert nach Tabelle 4 verwendet werden.

5 Berechnungsbeispiele

Zweifeldträger

In Bild 1 wurde als einführendes Beispiel ein Zweifeldträger untersucht. Hier wird nun näher auf den Fall „ $c_\vartheta = 6$ kNm/m und seitliche Stütze am Obergurt“ eingegan-

gen, für den mit dem EDV-Programm KSTAB2002 $q_{Ki,z} = 15,56$ kNm ermittelt wurde. Daraus ergibt sich das Biegedrillknickmoment an der Stütze zu

$$|M_{Ki,y,B}| = 15,56 \cdot 14^2/8 = 381,22 \text{ kNm.}$$

Zur Ermittlung einer Näherungslösung werden die Parameter

$$\alpha_T = \frac{\ell^2 \cdot GI_T}{\pi^2 \cdot EI_\omega} = 12,27 \text{ und } \delta_c = \frac{\sqrt{c_\vartheta \cdot EI_\omega}}{GI_T} = 0,774$$

benötigt. Wegen $\alpha_T > 10$ sind die maßgebenden Beiwerte nach Tabelle 3:

$$a = 15,86, \quad b = 1,54, \quad c = 3,52 \text{ und } d = 9,48.$$

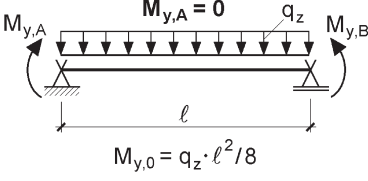
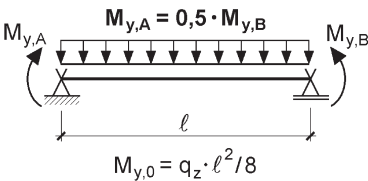
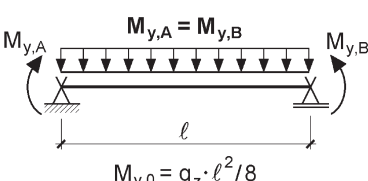
Diese Werte können auch aus Tabelle 5 (Einfeldträger mit Randmoment, $M_{y,A} = 0, M_{y,B} = -M_{y,0}$) abgelesen werden, da der Zweifeldträger aus Symmetriegründen in zwei gleichwertige Einfeldträger aufgeteilt werden kann. Mit

$$k_\omega = a + b \cdot \alpha_T + c \cdot \alpha_T \cdot \delta_c + d \cdot \delta_c = 75,52$$

und $a_g = 30,0 - 1,07 = 28,93$ cm erhält man als Näherung

Tabelle 4. Beiwerte zur Ermittlung von M_{Ki} für gabelgelagerte Einfeldträger mit Gleichstreckenlasten und Randmomenten (gebundene Drehachse Mitte OG, $c_{\vartheta} = 0$)

Table 4. Coefficients to determine M_{Ki} of selected single span beams with simple torsional supports and uniformed loads (lateral supported at the top flange, $c_{\vartheta} = 0$)

Baustatisches System	$\frac{M_{y,B}}{M_{y,0}}$	$\alpha_T \leq 10$		$\alpha_T > 10$	
		a	b	a	b
	-0,3	91,47	2,87	97,69	2,24
	-0,4	54,80	2,84	62,53	2,07
	-0,5	37,13	2,79	45,52	1,95
	-0,6	27,21	2,72	35,85	1,86
	-0,7	21,08	2,65	29,75	1,79
	-0,8	17,06	2,59	25,61	1,73
	-0,9	14,31	2,52	22,64	1,69
	-1,0	12,37	2,46	20,43	1,65
	-0,3	64,80	2,99	72,72	2,20
	-0,4	36,02	2,92	45,09	2,02
	-0,5	22,61	2,83	32,00	1,89
	-0,6	15,42	2,72	24,67	1,79
	-0,7	11,34	2,60	20,08	1,72
	-0,8	8,96	2,47	16,99	1,67
	-0,9	7,51	2,35	14,79	1,62
	-1,0	6,57	2,24	13,16	1,59
	-0,3	33,14	2,64	40,69	1,89
	-0,4	17,24	2,49	24,93	1,72
	-0,5	10,35	2,33	17,49	1,62
	-0,6	7,17	2,15	13,31	1,54
	-0,7	5,61	1,99	10,69	1,48
	-0,8	4,74	1,86	8,92	1,44
	-0,9	4,20	1,75	7,67	1,40
	-1,0	3,84	1,66	6,75	1,37
$ M_{Ki,y,B} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\omega}}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_{\omega} \text{ mit } k_{\omega} = a + b \cdot \alpha_T; \quad \alpha_T = \frac{\ell^2 \cdot GI_T}{\pi^2 \cdot EI_{\omega}}$					

$$|M_{Ki,y,B}| = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\omega}}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_{\omega} = 347,63 \text{ kNm.}$$

Dieser Wert ist 8,8 % kleiner als die genaue Lösung, siehe oben.

Mit $M_{pl,y,d} = 137,10 \text{ kNm}$ kann der bezogene Schlankheitsgrad

$$\bar{\lambda}_M = \sqrt{\frac{137,10 \cdot 1,1}{347,63}} = 0,659$$

nach [1] bestimmt werden. Der Abminderungsfaktor κ_M für das Ersatzstabverfahren ist dann mit $n = 2,5$

$$\kappa_M = 0,954.$$

Damit beträgt die maximal aufnehmbare Gleichstreckenlast bei Anwendung des Nachweisverfahrens Elastisch-Plastisch

$$\max q_{z,d} = 0,954 \cdot 137,10 \cdot 8/14^2 = 5,34 \text{ kNm.}$$

Wenn man die genaue Lösung für M_{Ki} verwendet, erhält man

$$\max q_{z,d} = 5,39 \text{ kNm.}$$

Der Unterschied beträgt nur etwa 1 %, obwohl die Lösungen für M_{Ki} um 8,8 % differieren. Das Beispiel zeigt, daß insbesondere bei kleinen bezogenen Schlankheitsgraden an die Genauigkeit von M_{Ki} keine allzu hohen Ansprüche gestellt werden müssen.

Dreifeldträger

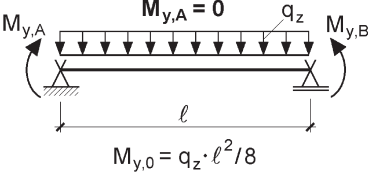
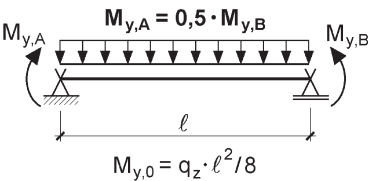
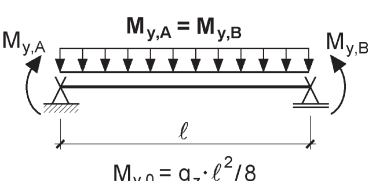
Der Dreifeldträger (HEA 240, S 235) in Bild 13 wird durch eine Gleichstreckenlast $q_z = 10 \text{ kN/m}$ beansprucht. Das betragsmäßig größte Biegemoment tritt an den inneren Innenstützen auf und beträgt

$$M_{y,B} = -0,1 \cdot 10 \cdot 12^2 = -144 \text{ kNm}$$

Wie beim Zweifeldträger werden mit KSTAB2002 vier Fälle untersucht

Tabelle 5. Beiwerte zur Ermittlung von M_{Ki} für gabelgelagerte Einfeldträger mit Gleichstreckenlasten und Randmomenten (gebundene Drehachse Mitte OG, $c_{\vartheta} \neq 0$)

Table 5. Coefficients to determine M_{Ki} of selected single span beams with simple torsional supports under uniform loading (lateral supported at the top flange, $c_{\vartheta} \neq 0$)

Baustatisches System	$\frac{M_{y,B}}{M_{y,0}}$	$\alpha_T \leq 10$				$\alpha_T > 10$			
		a	b	c	d	a	b	c	d
	-0,3	81,80	2,49	6,64	0,18	85,68	2,11	4,39	22,69
	-0,4	48,44	2,45	5,92	0,02	53,52	1,94	4,08	18,45
	-0,5	32,55	2,38	5,46	-0,04	38,15	1,82	3,89	15,63
	-0,6	23,72	2,31	5,14	-0,06	29,49	1,73	3,77	13,65
	-0,7	18,32	2,24	4,90	-0,07	24,07	1,67	3,68	12,19
	-0,8	14,78	2,18	4,73	-0,07	20,40	1,62	3,61	11,07
	-0,9	12,34	2,12	4,58	-0,07	17,79	1,57	3,56	10,19
	-1,0	10,60	2,06	4,47	-0,07	15,86	1,54	3,52	9,48
	-0,3	57,20	2,56	6,89	0,04	62,07	2,08	4,34	25,52
	-0,4	31,35	2,49	6,03	-0,05	37,29	1,90	4,03	19,97
	-0,5	19,52	2,39	5,50	-0,07	25,74	1,77	3,85	16,49
	-0,6	13,21	2,29	5,14	-0,07	19,34	1,68	3,72	14,12
	-0,7	9,55	2,19	4,88	-0,07	15,38	1,61	3,63	12,41
	-0,8	7,29	2,10	4,68	-0,06	12,73	1,56	3,57	11,12
	-0,9	5,84	2,02	4,53	-0,06	10,84	1,52	3,51	10,11
	-1,0	4,87	1,94	4,40	-0,06	9,45	1,48	3,47	9,31
	-0,3	27,75	2,12	7,33	-0,18	31,06	1,79	4,35	29,68
	-0,4	13,92	2,02	6,27	-0,17	17,76	1,63	4,03	22,18
	-0,5	7,93	1,90	5,63	-0,15	11,64	1,53	3,84	17,71
	-0,6	5,00	1,78	5,21	-0,13	8,26	1,46	3,71	14,80
	-0,7	3,45	1,67	4,91	-0,12	6,16	1,40	3,62	12,75
	-0,8	2,56	1,58	4,68	-0,12	4,75	1,36	3,55	11,24
	-0,9	2,02	1,50	4,51	-0,11	3,75	1,33	3,49	10,07
	-1,0	1,67	1,44	4,37	-0,11	3,01	1,30	3,44	9,14

$$|M_{Ki,y,B}| = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\omega}}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_{\omega} \text{ mit } k_{\omega} = a + b \cdot \alpha_T + c \cdot \alpha_T \cdot \delta_c + d \cdot \delta_c; \quad \delta_c = \frac{\sqrt{c_{\vartheta} \cdot EI_{\omega}}}{GI_T}$$

- $c_{\vartheta} = 0$, ohne seitliche Stützung:

$$|M_{Ki,y,B}| = 159 \text{ kNm}$$

- $c_{\vartheta} = 5 \text{ kNm/m}$, ohne seitliche Stützung:

$$|M_{Ki,y,B}| = 289 \text{ kNm}$$

- $c_{\vartheta} = 0$, seitliche Stützung am OG:

$$|M_{Ki,y,B}| = 511 \text{ kNm}$$

- $c_{\vartheta} = 5 \text{ kNm/m}$, seitliche Stützung am OG:

$$|M_{Ki,y,B}| = 916 \text{ kNm}$$

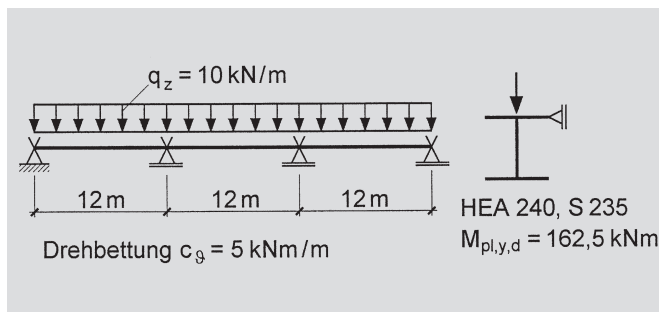


Bild 13. Beispiel Dreifeldträger
Fig. 13. Example triple span beam

Wie man sieht, haben die stabilisierenden Maßnahmen erheblichen Einfluß auf die Biegedrillknickgefahr. Die idealen Biegedrillknickmomente sind zwischen 10 und 636 % größer als vorhandene Biegemoment. Der Tragsicherheitsnachweis mit dem Ersatzstabverfahren führt beim letzten Fall zu

$$\bar{\lambda}_M = \sqrt{162,5 \cdot 1,1/916} = 0,442 \text{ und } \kappa_M = 0,993.$$

Der Nachweis ergibt sich dann wie folgt:

$$\frac{144}{0,993 \cdot 162,5} = 0,892 < 1$$

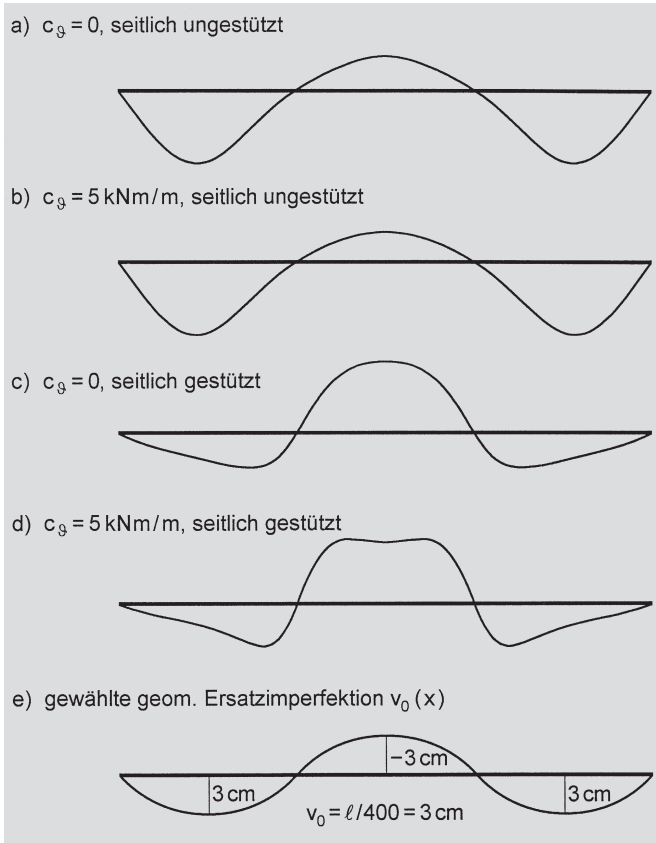


Bild 14. Eigenformen $v(x)$ für den Dreifeldträger (a bis d) und geom. Ersatzimperfection (e)

Fig. 14. Modal shapes $v(x)$ for the triple span beam (a to d) and equivalent geometrical imperfections

Zum Vergleich wird M_{Ki} näherungsweise mit Tabelle 3 ermittelt (siehe dort Dreifeldträger):

$$\alpha_T = \frac{\ell^2 \cdot GI_T}{\pi^2 \cdot EI_\omega} = 7,12 < 10; \delta_c = \frac{\sqrt{c_\phi \cdot EI_\omega}}{GI_T} = 0,552$$

$a = 6,20; b = 1,83; c = 4,75; d = -0,10; k_\omega = 37,83$

$$|M_{Ki,y,B}| = \frac{\pi^2 \cdot EI_\omega}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_\omega = 820 \text{ kNm} \quad (89,5 \%)$$

Mit diesem etwa 10 % kleineren M_{Ki} ergibt sich der Nachweis zu $0,894 < 1$.

Zum Vergleich soll M_{Ki} auch näherungsweise mit Hilfe von Tabelle 5 bestimmt werden. Dazu wird der Dreifeldträger in drei Einfeldträger aufgeteilt. Für die Bemessung ist dann das Mittelfeld maßgebend, da die beiden Randfelder für das Mittelfeld stabilisierend wirken. Diese Vorgehensweise liegt auf der sicheren Seite, und M_{Ki} muß sich kleiner als für das System „Dreifeldträger“ ergeben.

EDV-Programm: $|M_{Ki,y,B}| = 800 \text{ kNm}$
 Näherung mit Tabelle 5, Fall $M_{y,A} = M_{y,B}$:

$$M_{y,B}/M_{y,0} = -0,1/0,125 = -0,8$$

$$a = 2,56; b = 1,58; c = 4,68; d = -0,12$$

$$\Rightarrow k_\omega = 32,12 \quad \text{und} \quad |M_{Ki,y,B}| = 697 \text{ kNm}$$

Die Betrachtung des Mittelfeldes liefert mit $M_{Ki} = 800$ bzw. 697 kNm für baupraktische Bemessungsaufgaben durchaus brauchbare Ergebnisse.

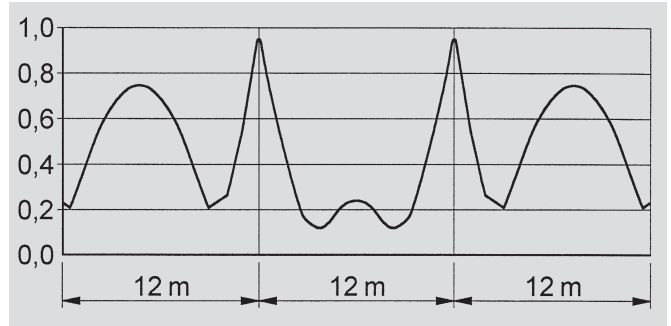


Bild 15. Querschnittsausnutzung des Dreifeldträgers für Fall d
Fig. 15. Cross-sectional utilization of the triple span beam for case d

Als Alternative zum Ersatzstabverfahren kann der Tragsicherheitsnachweis auch unter Ansatz geometrischer Ersatzimperfectionen mit den Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung geführt werden. Da für den zutreffenden Ansatz der geometrischen Ersatzimperfectionen nach DIN 18800 die Eigenformen $v(x)$ benötigt werden, sind sie in Bild 14 für vier Fälle dargestellt. Wie man sieht, kann in allen Fällen eine dreiwellige geometrische Ersatzimperfection angesetzt werden. Der Stich der Vorkrümmung beträgt $v_0 = \pm \ell/400 = \pm 3 \text{ cm}$.

Damit erhält man die in Bild 15 skizzierte Querschnittsausnutzung. Sie wurde mit KSTAB2002 unter Verwendung des Teilschnittgrößenverfahrens (TSV) ermittelt, was einem Nachweis mit dem Verfahren Elastisch-Plastisch entspricht [2]. Die maximale Beanspruchung der Querschnitte tritt an den Innenstützen auf (93,5 %). Sie ist dort nur unwesentlich größer als nach Theorie I. Ordnung und ohne Ansatz von geometrischen Ersatzimperfectionen.

Riegel eines Zweigelenkrahmens

Als Beispiel für den Riegel eines Zweigelenkrahmens wird der einfeldrige Stab mit Beanspruchungen durch Randmomente und Gleichstreckenlasten untersucht. Der Dachverband soll so engmaschig und steif ausgebildet sein, daß durchgängig eine seitlich unverschiebliche Lagerung des Obergurtes realisiert sei. Vorhandene Stahltrapezbleche bewirken eine Drehbettung von $c_\phi = 5 \text{ kNm/m}$.

Ein ähnliches Beispiel findet sich auch in [2]. Dort wird jedoch von einer Abstützung in den Viertelpunkten ausgegangen und näherungsweise auch eine Dachneigung (Satteldach) berücksichtigt. Darüber hinaus wird dort auch der Stiel des Zweigelenkrahmens untersucht.

Das Biegedrillknickmoment kann näherungsweise mit Hilfe von Tabelle 5 ermittelt werden:

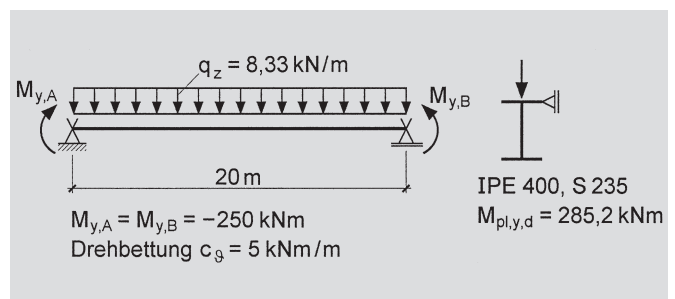


Bild 16. Beispiel Riegel eines Zweigelenkrahmens
Fig. 16. Example beam of a two-hinged frame

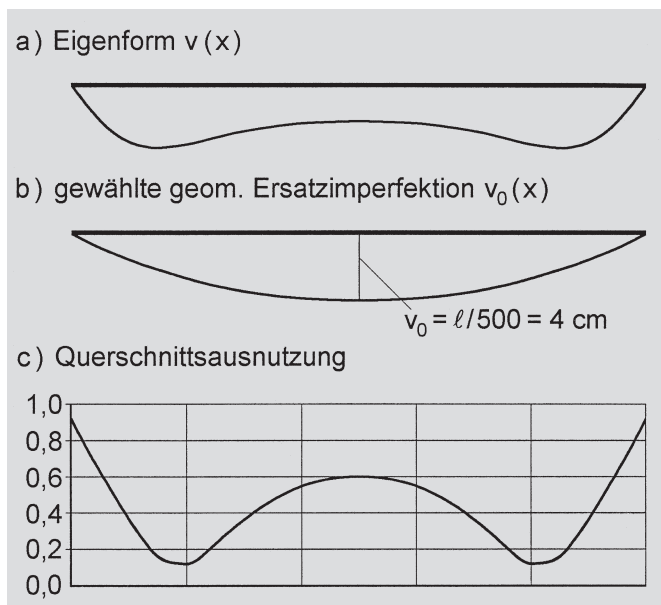


Bild 17. Eigenform $v(x)$, geometrische Ersatzimperfektion und Querschnittsausnutzung für das Beispiel „Riegel eines Zweigelenkrahmens“

Fig. 17. Modal shape $v(x)$, equivalent geometrical imperfections and cross-sectional utilization for the example „beam of a two-hinged frame“

$$M_{y,0} = 8,33 \cdot 20^2/8 = 416,5 \text{ kNm}$$

$$M_{y,B}/M_{y,0} = -250/416,5 = -0,6$$

$$\alpha_T = 16,29 > 10, \quad \delta_c = 0,55$$

$$\Rightarrow a = 8,26; \quad b = 1,46; \quad c = 3,71; \quad d = 14,80$$

$$k_\omega = 73,42$$

$$|M_{Ki,y,B}| = \frac{\pi^2 \cdot EI_\omega}{\ell^2 \cdot a_g} \cdot k_\omega = 482,35 \text{ kNm}$$

Als genaue Lösung erhält man mit KSTAB2002 $|M_{Ki,y,B}| = 609 \text{ kNm}$, d. h., die Näherung liegt bei etwa 80 %. Ein Nachweis unter Verwendung der Näherungslösung führt zu:

$$\bar{\lambda}_M = \sqrt{285,2 \cdot 1,1/482,35} = 0,806; \quad \kappa_M = 0,889$$

$$\frac{250}{0,889 \cdot 285,2} = 0,986 < 1$$

Im Vergleich dazu ergibt sich mit der genauen Lösung für M_{Ki} der Nachweis $0,940 < 1$.

Alternativ wird auch bei diesem Beispiel der Nachweis mit den Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung geführt. Dazu ist in Bild 17 die mit KSTAB2002 ermittelte

Eigenform dargestellt. Sie ist einwellig, hat jedoch aufgrund der Drehbettung nicht in Feldmitte ihr Maximum. Als geometrische Ersatzimperfektion wird dennoch eine einwellige Parabel gemäß Bild 17b angesetzt. Der Nachweis wird wie für das Beispiel Dreifeldträger beschrieben mit KSTAB2002 und dem TSV geführt. Die zugehörige Querschnittsausnutzung ist in Bild 17c dargestellt.

Literatur

- [1] DIN 18800 Teil 1 und Teil 2: Stahlbauten, Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken. Ausgabe November 1990.
- [2] Kindmann, R., Frickel, J.: Elastische und Plastische Querschnittstragfähigkeit; Grundlagen, Methoden, Berechnungsverfahren, Beispiele. Berlin: Ernst & Sohn, 2002.
- [3] Muszkiewicz, R.: Zum Einfluß der Drehbettung auf das Biegedrillknicken. Fortschritt-Bericht VDI, Reihe 4 Nr. 174. Düsseldorf: VDI Verlag, 2002.
- [4] Kindmann, R., Frickel, J.: Grenztragfähigkeit von I-Querschnitten für beliebige Schnittgrößen. Stahlbau 68 (1999), H. 4, S. 290–301.
- [5] Heil, W.: Stabilisierung von biegedrillknickgefährdeten Trägern durch Trapezblechscheiben. Stahlbau 63 (1994), H. 6, S. 169–178.
- [6] Krahwinkel, M.: Zur Beanspruchung stabilisierender Konstruktionen im Stahlbau. Fortschritt-Bericht VDI, Reihe 4 Nr. 166. Düsseldorf: VDI Verlag, 2001.
- [7] Hanswille, G., Lindner, J., München, D.: Zum Biegedrillknicken von Verbundträgern. Stahlbau 67 (1998), H. 7, S. 252–535.
- [8] Parvizinia, H.: Zum Biegedrillknicken bei Trägern mit diskreten seitlichen Abstützungen. TWM Nr. 95-7, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1995.
- [9] Kindmann, R.: Vergleich verschiedener Berechnungsformeln zur Ermittlung von M_{Ki} . In: Festschrift Professor Lindner, hrsgn. v. D. Bamm, S. 239–249. Berlin 1997.
- [10] Lindner, J., Scheer, J., Schmidt, H.: Stahlbauten, Erläuterungen zu DIN 18800 Teil 1 bis 4. 3. Aufl. Berlin: Ernst & Sohn, 1998.
- [11] Chwalla, E.: Die Kippstabilität gerader Träger mit I-Querschnitt. Forschungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaus, Heft 2 (1939). Berlin: Springer-Verlag.
- [12] Maier, D. H.: Erläuterungen und Beispiele zur Anwendung der Stahlbaugrundnorm. In: Stahlbau-Kalender 1999, hrsgn. v. U. Kuhlmann, S. 241–271. Berlin: Ernst & Sohn, 1999.
- [13] Kindmann, R.: Theorie II. Ordnung und Stabilität. Band 9 der Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahl- und Verbundbau, Ruhr-Universität Bochum 1999.

Autoren dieses Beitrages:

Prof. Dr.-Ing. Rolf Kindmann, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau, 44780 Bochum, und Dr.-Ing. Reiner Muszkiewicz, Bundesministerium für Verkehr, Bau- und Wohnungswesen, Abteilung Straßenbau, Straßenverkehr Referat Brücken- und Ingenieurbau