

# Erweiterung der Berechnungsverfahren für Verbundträger

Für die Berechnung von Verformungen und Spannungen in Verbundträgern aus Stahl und Beton hat sich das Gesamtquerschnittsverfahren allgemein durchgesetzt. Das Kriechen und Schwinden des Betons wird zur Zeit bei diesem Verfahren näherungsweise berücksichtigt, da bei der Bestimmung der Kriechbeiwerte und Reduktionszahlen für den Beton das Betonbiegemoment in den Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigt wurde.

In diesem Beitrag wird ein erweitertes Gesamtquerschnittsverfahren vorgestellt, bei dem auf die o. g. Vernachlässigung verzichtet wird. Damit lassen sich die Verformungen und Spannungen mit größerer Genauigkeit als bisher bestimmen. Mit neuen Kriechbeiwerten und Reduktionszahlen wird der Anwendungsbereich auf Verbundträger erweitert, deren Betonteil eine relativ große Biegesteifigkeit hat. Das Kriechen des Betons wird auf der Grundlage von Eurocode 4 bzw. Eurocode 2 berücksichtigt.

**Extended calculation method for composite beams.** For the calculation of deformations and stresses in composite beams consisting of steel and concrete the total cross-section calculation method is generally used. This method currently takes creep and shrinkage of the concrete approximatively into account, because during the calculation of the creep and reduction factors for the concrete the bending moment in the equilibrium conditions is disregarded.

This contribution explains an extended total cross-section calculation method which avoids the abovementioned neglect so that the deformations and stresses can be determined more exactly now. The new creep and reduction factors being introduced enlarge the application of this method to composite beams with a relatively high flexural stiffness of the concrete. Concrete creep is considered in accordance with Eurocode 4 resp. Eurocode 2.

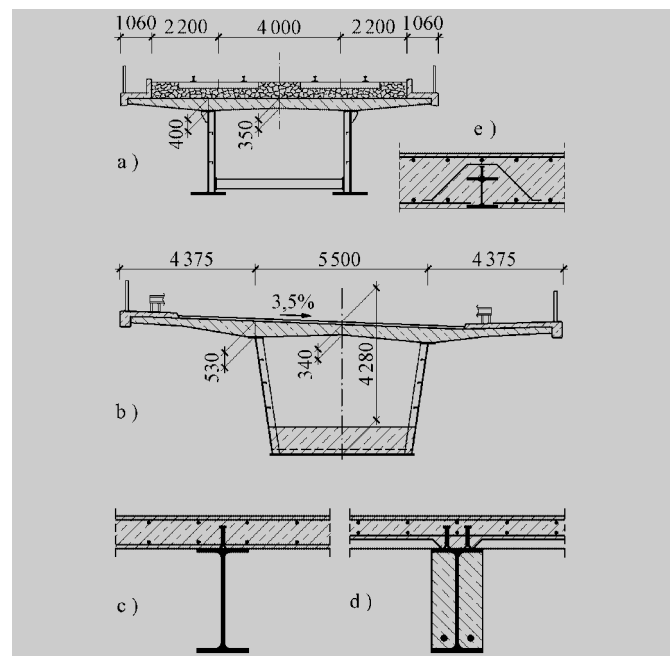
## 1 Einleitung

Verbundträger bestehen in der Regel aus Stahlträgern und Betonplatten, die den Obergurt des Verbundträgers bilden. Bild 1a zeigt einen typischen Querschnitt von Verbundbrücken. Aufgrund der großen Trägerhöhe hat das Eigentragheitsmoment der Betonplatte nur einen relativ geringen Anteil am Gesamtträgheitsmoment. Dies gilt auch für den Brückenquerschnitt in Bild 1b, der im Untergurtbereich durch Beton verstärkt wird. Der Querschnitt in Bild 1c mit niedriger Konstruktionshöhe ist vornehmlich im Hoch- und Industriebau anzutreffen. Die Konstruktionsbeispiele in Bild 1d und 1e zeigen Querschnitte mit Kammerbeton und einbetonierte Stahlquerschnitte, wie sie bei Flachdecken vorkommen.

Bei der Entwicklung der Berechnungsverfahren für Verbundträger standen Querschnitte aus Stahlträgern und Betonplatten als Obergurt im Vordergrund, also Querschnitte, die prinzipiell Bild 1a entsprechen. Die entwickelten Verfahren, die die zeitabhängigen Auswirkungen des Kriechens und Schwindens berücksichtigen, können in zwei Gruppen eingeteilt werden.

Eine Gruppe, z. B. [3] bis [9], basiert auf den 1937 von *Dischinger* [1], [2] vorgeschlagenen differentiellen Spannungs-Dehnungsbeziehungen für den Beton (*Dischinger-Gleichung*). Diese Gruppe von Verfahren hat in der Geschichte eine große Rolle gespielt und ist ausgiebig eingesetzt worden. In den siebziger Jahren wurden diese Verfahren u. a. von *Haensel* [10], [11] erweitert und an den damals neu formulierten Kriechansatz, der in CEB Model Code 1978 [21] und DIN 4227 Ausgabe 1979 [22] Niederschlag gefunden hat, angepaßt. Die veränderte differentielle Gleichung wird als erweiterte *Dischinger-Gleichung* bezeichnet. Die andere Gruppe von Verfahren [13] bis [16] basiert auf der algebraischen Spannungs-Dehnungsbeziehung nach *Trost/Zerna* [17] bis [20]. Diese Verfahren haben sich bisher bei der Berechnung von Verbundträgern nicht allgemein durchgesetzt.

Im deutschsprachigen Raum wird in den letzten zwanzig Jahren aufgrund der großen Anschaulichkeit bevorzugt das Gesamtquerschnittsverfahren von *Haensel* [10], [11], [12], [26] angewendet, das auf der erweiterten *Dischinger-Gleichung* basiert. Bei diesem Verfahren wird vorausgesetzt, daß das Eigentragheitsmoment der Betonplatte im Verhältnis zum Gesamtträgheitsmoment gering ist. Dies bedeutet, daß das Gesamtquerschnittsverfahren von *Haensel* für hohe Stahlträger mit dünner



**Bild 1.** Querschnitte von Verbundträgern nach [29]  
**Fig. 1.** Cross-sections of composite beams according to [29]

Betonplatte gilt. Für die in der Praxis ausgeführten Verbundträger trifft diese Voraussetzung jedoch nur teilweise zu. Darüber hinaus wird bei dem Verfahren in [10] das Kriechen in Anteile infolge verzögerter Elastizität und reines Fließkriechen aufgeteilt. Diese Aufteilung wird im Eurocode 2 [23], dessen Kriechfunktion auch vom Eurocode 4 [24] bzw. DIN 18800 Teil 5 [25] übernommen wurde, nicht mehr vorgenommen.

Im folgenden wird ein Berechnungsverfahren vorgestellt, bei dem das Kriechen des Betons auf Grundlage des Eurocode 2 berücksichtigt wird. Darüber hinaus wird das Biegemoment im Betonteil bei der Herleitung der Kriechbeiwerte und Reduktionszahlen für den Beton nicht vernachlässigt. Da es im übrigen dem bekannten Gesamtquerschnittsverfahren entspricht, kann es als erweitertes Gesamtquerschnittsverfahren bezeichnet werden.

Es werden folgende, in der Berechnungspraxis übliche Annahmen getroffen:

1. Es gilt die *Bernoulli*-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte. Beton- und Stahlteile sind schubsteif miteinander verbunden, so daß keine Relativverschiebungen auftreten.
2. Das *Hookesche* Gesetz ist unbeschränkt gültig für Stahl (Baustahl, Betonstahl und Spannstahl) sowie unter kurzzeitigen Belastungen auch für Beton.
3. Der Beton kann mit ausreichender Genauigkeit im Gebrauchslastbereich als linear-viskoelastischer Werkstoff angesehen werden.
4. Der zeitliche Verlauf des Schwindens wird für das betrachtete Kriechintervall affin zum Verlauf des Kriechens angenommen.
5. Die zeitlichen Verläufe für die durch Kriechen und Schwinden in einem statisch unbestimmten System zusätzlich hervorgerufenen zeitabhängigen Schnittgrößen (Zwängungen) wachsen affin zum Kriechverlauf an.

**2 Grundlagen des erweiterten Gesamtquerschnittsverfahrens**

Nach der Theorie linear-viskoelastischer Werkstoffe (Voraussetzung 3), die im allgemeinen für das zeitabhängige Betonverhalten zugrunde gelegt wird, läßt sich folgende allgemeine zeitabhängige Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den Beton herleiten:

$$\epsilon_c(t) = J(t, t_0) \cdot \sigma_c(t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) \cdot \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} \cdot d\tau + \epsilon_s(t) \quad (1)$$

Darin ist  $J(t, t_0)$  die Kriechfunktion, die die lastabhängige Dehnung eines im Zeitpunkt  $t_0$  einer andauernden Einheitsspannung ausgesetzten Stabes zum Betrachtungszeitpunkt  $t$  darstellt.  $\epsilon_s(t)$  ist das Schwindmaß zur Zeit  $t$ .

Bei einem Verbundträger mit dehn- und biegesteifen Beton- und Stahlquerschnitten führt die integrale Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den Beton nach Gl. (1) zur Berechnung der zeitabhängigen Teilschnittgrößen auf zwei Integralgleichungen.

Durch Lösung der gekoppelten oder für einige Lastfälle auch nicht gekoppelten Integralgleichungen ist ein exaktes Verfahren für die Berechnung von Verbundkonstruktionen in [27] entwickelt worden. Darin sind auch Berechnungsformeln für die Teilschnittgrößen (Bild 2) in Stahlverbundträgern für verschiedene in der Praxis übliche Lastfälle (z. B. Dauerlasten, Betonschwinden und äußerlich plötzliche bzw. zeitlich veränderliche erzwungene Verformungen) abgeleitet worden.

Um das zeitabhängige Verhalten von Verbundträgern in möglichst einfacher Weise zutreffend erfassen zu können, wurden in [27] folgende algebraische Quasi-Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für den Beton in einem Verbundquerschnitt eingeführt:

$$\epsilon_c(t) - \epsilon_s(t) = \frac{N_c(t)}{E_{c,0} \cdot A_c} [1 + \psi_N \cdot \varphi(t, t_0)] = \frac{N_c(t)}{E_{c\psi N} \cdot A_c}$$

$$\kappa_c(t) = \frac{M_c(t)}{E_{c,0} \cdot I_c} [1 + \psi_M \cdot \varphi(t, t_0)] = \frac{M_c(t)}{E_{c\psi M} \cdot I_c} \quad (2)$$

mit

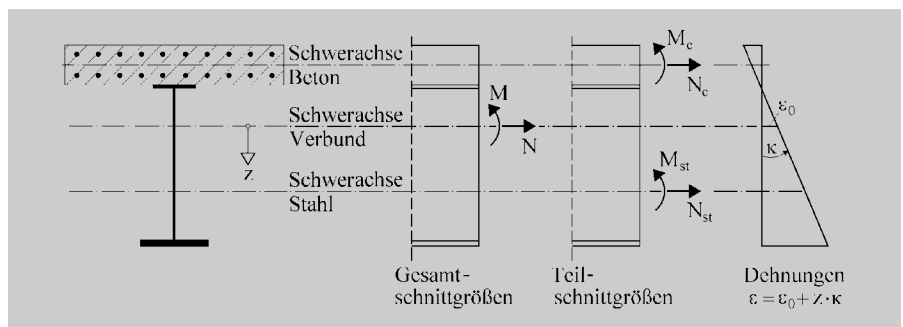
$$E_{c\psi N} = \frac{E_{c,0}}{1 + \psi_N \cdot \varphi(t, t_0)}$$

$$E_{c\psi M} = \frac{E_{c,0}}{1 + \psi_M \cdot \varphi(t, t_0)} \quad (3)$$

$\epsilon_c(t)$  Dehnung in der Schwerachse des Betonteils  
 $\kappa_c(t)$  Krümmung des Betonteils

Hierbei ist  $E_{c,0} = E_c(t_0)$  der Elastizitätsmodul des Betons zum Belastungszeitpunkt  $t_0$  und  $\varphi(t, t_0)$  die Kriechzahl des Betons zur Zeit  $t$ .  $\psi_N$  und  $\psi_M$  sind die Kriechbeiwerte für die Betonnormalkraft  $N_c$  bzw. für das Betonbiegemoment  $M_c$  in einem Verbundquerschnitt.  $E_{c\psi N}$  und  $E_{c\psi M}$  sind die entsprechenden fiktiven Elastizitätsmoduln.

Die algebraischen Quasi-Spannungs-Dehnungs-Beziehungen – Gl. (2) – sind gleichwertig mit der integralen Spannungs-Dehnungs-Beziehung Gl. (1). Deshalb können ausgehend von Gl. (2) die unterschiedlichen zeitlichen Entwicklungen der Betonnormalkraft und des Betonbiegemomentes in einem Verbundquerschnitt ebenfalls exakt erfaßt werden. Das heißt, wie auch in [27] durch umfangreiche Herleitungen festgestellt wurde, daß die Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons in einem Verbundquerschnitt durch fiktive Elastizitätsmo-



**Bild 2.** Teil- und Gesamtschnittgrößen von Verbundträgerquerschnitten sowie Dehnungen

**Fig. 2.** Partial and total internal forces of composite cross sections and strains

duln  $E_{c\psi N}$  und  $E_{c\psi M}$  und weiter durch lastfallabhängige ideale Gesamtquerschnitte exakt berücksichtigt werden können. Die für die Berechnungen nach dem Gesamtquerschnittsverfahren benötigten lastfallabhängigen Reduktionszahlen können dann mit Hilfe der Gl. (2) in einfacher Weise eingeführt werden:

$$n_F^L = \frac{E_a}{E_{c\psi N}^L} = n_0 (1 + \psi_N^L \cdot \varphi_t)$$

$$n_I^L = \frac{E_a}{E_{c\psi M}^L} = n_0 (1 + \psi_M^L \cdot \varphi_t) \quad (4)$$

mit

$$n_0 = \frac{E_a}{E_{c,0}} \quad \text{und} \quad \varphi_t = \varphi(t, t_0) \quad (5)$$

Der Kopfzeiger L kennzeichnet die Art der Beanspruchung.  $E_a$  ist der Elastizitätsmodul des Stahles. Die Reduktionszahlen  $n_F^L$  und  $n_I^L$  gelten für die Betonfläche und das Betonträgheitsmoment zur Berechnung ideeller Querschnittswerte für den Betrachtungszeitpunkt t.  $n_0$  ist die Reduktionszahl zum Belastungsbeginn  $t_0$ , die auch für kurzzeitige Belastungen zu verwenden ist.

Auf die Bestimmung der Kriechbeiwerte  $\psi_N$  und  $\psi_M$  wird in Abschn. 7 näher eingegangen. Vorab wird in den Abschn. 3 bis 6 die Berechnung der Querschnittswerte, Spannungen und Schnittgrößen behandelt.

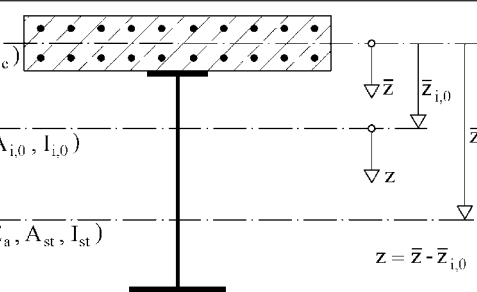
### 3 Querschnittswerte

#### 3.1 Kurzzeitige Belastungen

Spannungen und Verformungen können bei kurzzeitigen Einwirkungen im Gebrauchszustand nach der Elastizitätstheorie berechnet werden, siehe dazu auch Annahme 2 in Abschnitt 1. Bei Verbundquerschnitten aus Stahl und Beton ist es üblich, den Elastizitätsmodul des Baustahles  $E_a$  als Bezugsgröße zu wählen und den Querschnitt in einen ideellen Stahlquerschnitt umzuwandeln.

Die Vorgehensweise wird z. B. in [12], Abschn. 4.5, beschrieben. Hier ist sie in Tabelle 1 zusammengestellt. Dabei ist zu bemerken, daß Baustahl, Betonstahl und

**Tabelle 1.** Querschnittswerte für kurzzeitige Einwirkungen  
**Table 1.** Cross-section properties for short-term actions

Schwerachse Beton ( $E_c, A_c, I_c$ )	
Schwerachse Verbund ( $E_a, A_{i,0}, I_{i,0}$ )	
Schwerachse Gesamtstahl ( $E_a, A_{st}, I_{st}$ )	
Transformierte Querschnittswerte des Betonteils:	
$A_{c,0} = A_c/n_0$	$I_{c,0} = I_c/n_0$
mit $n_0 = E_a/E_{c,0}$ Reduktionszahl für kurzzeitige Belastungen	
Ideelle Querschnittswerte des Verbundquerschnitts:	
$A_{i,0} = A_{c,0} + A_{st}$	$\bar{z}_{i,0} = A_{st} \cdot \bar{z}_{st}/A_{i,0}$
$I_{i,0} = I_{c,0} + I_{st} + \bar{z}_{st}^2 \cdot A_{st} \cdot A_{c,0}/A_{i,0}$	

Spannstahl zu einem Gesamtstahlquerschnitt (Index „st“) zusammengefaßt werden. Bei einem Spannstahl mit  $E_p \neq E_a$  ist vorab die Transformation mit der Reduktionszahl  $n_p = E_a/E_p$  erforderlich. Da die Betonfläche und das Betonträgheitsmoment mit der Reduktionszahl  $n_0$  reduziert werden, ist der Verbundquerschnitt ein zum gegebenen Querschnitt gleichwertiger Stahlquerschnitt. Die z-Achse ist Hauptachse des Verbundquerschnitts, d. h., der Schwerpunkt liegt in  $z = 0$ . Im Schwerpunkt des Betonquerschnitts wurde der Ursprung der  $\bar{z}$ -Achse angeordnet.  $\bar{z}_{st}$  und  $\bar{z}_{i,0}$  kennzeichnen die Schwerpunktlagen des Verbund- und des Gesamtstahlquerschnitts.

#### 3.2 Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden

Die Vorgehensweise zur Berechnung der Querschnittswerte und Spannungen ist in Tabelle 2 zusammengestellt. Sie entspricht Abschnitt 4.5 in [12]. Unterschiede ergeben sich gegenüber [12] aufgrund der Verwendung von unterschiedlichen Reduktionszahlen. In [12] wird die Art der Beanspruchung durch Fußzeiger „L“ gekennzeichnet. Hier wird „L“ als Kopfzeiger geschrieben, damit deutlich wird, daß sich unterschiedliche Zahlenwerte ergeben.

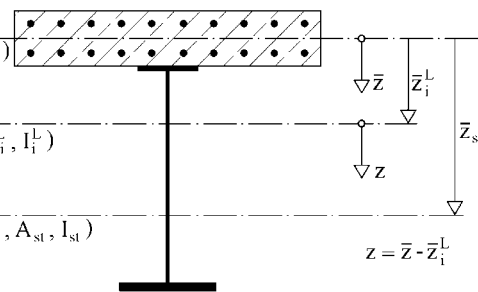
Die Berechnungen in den Tabellen 1 und 2 unterscheiden sich in formaler Hinsicht nur geringfügig. Während in Tabelle 1 die Reduktionszahl  $n_0$  verwendet wird, sind in Tabelle 2 die Reduktionszahlen  $n_F^L$  (Betonfläche) und  $n_I^L$  (Betonträgheitsmoment) einzusetzen. Die erforderlichen Kriechbeiwerte  $\psi_N^L$  und  $\psi_M^L$  sind nach Abschnitt 7 zu berechnen.

#### 4 Teilschnittgrößen

Die Schnittgrößen M und N können gemäß Bild 2 in Teilschnittgrößen aufgeteilt werden. Im Betonteil wirken  $M_c$  und  $N_c$  und im Stahlteil  $M_{st}$  und  $N_{st}$ . Grundlage für die Aufteilung ist die *Bernoulli*-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte, also Voraussetzung 1 in

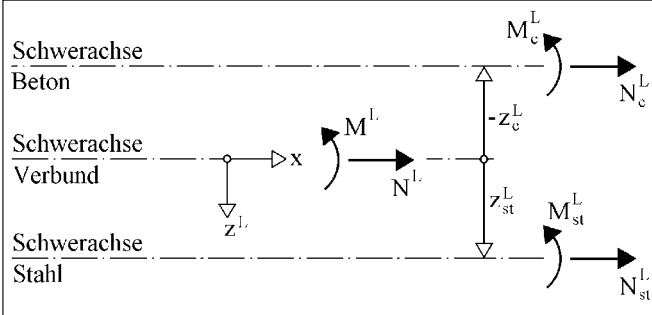
**Tabelle 2.** Querschnittswerte unter Berücksichtigung des Kriechens

**Table 2.** Cross-section properties under consideration of creep

Schwerachse Beton ( $E_c, A_c, I_c$ )	
Schwerachse Verbund ( $E_a, A_i^L, I_i^L$ )	
Schwerachse Gesamtstahl ( $E_a, A_{st}, I_{st}$ )	
Transformierte Querschnittswerte des Betonteils:	
$A_c^L = A_c/n_F^L$	$I_c^L = I_c/n_I^L$
mit $n_F^L = n_0 (1 + \psi_N^L \cdot \varphi_t)$ Reduktionszahl Betonfläche	
$n_I^L = n_0 (1 + \psi_M^L \cdot \varphi_t)$ Reduktionszahl Betonträgheitsmoment	
Ideelle Querschnittswerte des Verbundquerschnitts:	
$A_i^L = A_c^L + A_{st}$	$\bar{z}_i^L = A_{st} \cdot \bar{z}_{st}/A_i^L$
$I_i^L = I_c^L + I_{st} + \bar{z}_{st}^2 \cdot A_{st} \cdot A_c^L/A_i^L$	

**Tabelle 3.** Berechnung der Teilschnittgrößen im Beton- und Stahlteil

**Table 3.** Calculation of the partial internal forces in the concrete and steel parts



The diagram shows a cross-section of a composite beam divided into three horizontal layers: concrete (top), composite (middle), and steel (bottom). The concrete part has a height \$z\_c^L\$ and a neutral axis at distance \$z\_c^L\$ from the top. The steel part has a height \$z\_{st}^L\$ and a neutral axis at distance \$z\_{st}^L\$ from the top. Internal forces and moments are shown: \$N\_c^L\$ and \$M\_c^L\$ for the concrete, \$N\_{st}^L\$ and \$M\_{st}^L\$ for the steel, and \$N^L\$ and \$M^L\$ for the composite. A coordinate system \$x\$ is shown with origin at the top-left corner.

Teilschnittgrößen:

$$N_c^L = N^L \cdot \frac{A_c^L}{A_i^L} + M^L \cdot \frac{A_c^L \cdot z_c^L}{I_i^L}$$

$$N_{st}^L = N^L \cdot \frac{A_{st}^L}{A_i^L} + M^L \cdot \frac{A_{st}^L \cdot z_{st}^L}{I_i^L}$$

$$M_c^L = M^L \cdot \frac{I_c^L}{I_i^L}$$

$$M_{st}^L = M^L \cdot \frac{I_{st}^L}{I_i^L}$$

Gleichgewicht:

$$N^L = N_c^L + N_{st}^L$$

$$M^L = M_c^L + M_{st}^L + N_c^L \cdot z_c^L + N_{st}^L \cdot z_{st}^L$$

mit  $A_c^L = A_c/n_F^L$   $I_c^L = I_c/n_I^L$   
für kurzzeitige Einwirkungen ist  
 $n_F^L = n_I^L = n_0 = E_a/E_{c,0}$

Abschn. 1. Daraus ergibt sich die in Bild 2 dargestellte geradlinige Dehnungsverteilung

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + z \cdot \kappa \tag{6}$$

Die Berechnungsformeln zur Ermittlung der Teilschnittgrößen sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

**5 Spannungen**

Die Spannungsermittlung erfolgt mit den Gesamtschnittgrößen oder alternativ mit den Teilschnittgrößen. Beim Gesamtquerschnittsverfahren ist es üblich, die Berechnungen mit den Gesamtschnittgrößen durchzuführen, da der „Umweg“ über die Teilschnittgrößen überflüssig ist. Tabelle 4 enthält beide Methoden, damit die Zusammenhänge deutlich werden. Für kurzzeitige Einwirkungen können die Spannungen ebenfalls nach Tabelle 4 berechnet werden, wenn  $n_F^L = n_I^L = n_0$  und die Querschnittswerte nach Tabelle 1 eingesetzt werden.

**6 Schnittgrößenermittlung**

**6.1 Unterschiedliche Einwirkungen**

Da sich für die verschiedenartigen Einwirkungen unterschiedliche Kriechbeiwerte und Querschnittswerte ergeben, müssen sie getrennt untersucht werden.

Für kurzzeitige Einwirkungen kann die Schnittgrößenermittlung problemlos mit den üblichen Methoden der Baustatik vorgenommen werden. Dabei sind

**Tabelle 4.** Spannungsermittlung mit Teil- und Gesamtschnittgrößen

**Table 4.** Determination of stresses with partial and total internal forces

Querschnittsteil	Spannungen $\sigma$
Betonteil	$\sigma_c^L = \frac{N_c^L}{A_c} + \frac{M_c^L}{I_c} \cdot (z^L - z_c^L)$ $= \frac{N^L}{n_F^L \cdot A_i^L} + \frac{M^L}{n_F^L \cdot I_i^L} \cdot \left[ z_c^L + (z^L - z_c^L) \cdot \frac{n_F^L}{n_I^L} \right]$
Stahlteil	$\sigma_{st}^L = \frac{N_{st}^L}{A_{st}} + \frac{M_{st}^L}{I_{st}} \cdot (z^L - z_{st}^L)$ $= \frac{N^L}{A_i^L} + \frac{M^L}{I_i^L} \cdot z^L$
Beton-schwinden	$N^L = -N_S, M^L = M_S = -N_S \cdot z_c^S$ <p>und zusätzlich <math>\sigma_c = \frac{N_S}{A_c}</math></p>

die Querschnittswerte gemäß Tabelle 1 zu verwenden. Zu den kurzzeitigen Einwirkungen gehören

- Verkehrslasten
- zeitlich veränderliche Nutzlasten
- Temperaturunterschiede
- Dauerlasten zum Erstbelastungszeitpunkt  $t_0$

Bei allen Einwirkungen, die den Verbundträger über einen längeren Zeitraum beanspruchen, d. h. vom Zeitpunkt der Erstbelastung  $t_0$  bis zum Betrachtungszeitpunkt  $t$ , muß der Einfluß des Kriechens berücksichtigt werden. Dazu gehören ständig wirkende Eigen-, Nutz- und Verkehrslasten, Schwinden, Vorspannung durch Spannglieder oder Absenken und ungewollte Stützensenkungen. Für die Kriechberechnung werden sie folgendermaßen eingeteilt:

- zeitlich konstante Einwirkungen (Kopfzeiger  $L = B$ )
- zeitlich veränderliche Einwirkungen (Kopfzeiger  $L = BT$ )
- Betonschwinden (Kopfzeiger  $L = S$ )
- zeitlich konstante eingeprägte Verformungen (Kopfzeiger  $L = A$ )
- zeitlich veränderliche eingeprägte Verformungen (Kopfzeiger  $L = AT$ )

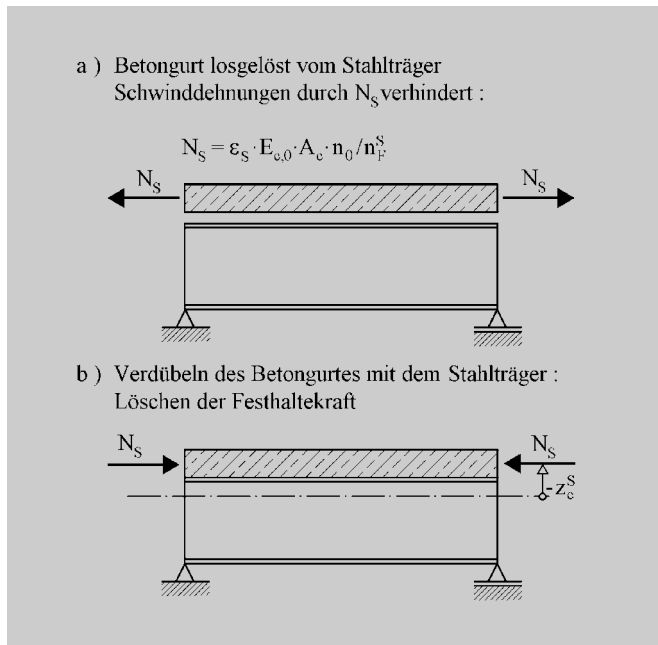
Die Behandlung der unterschiedlichen Einwirkungen wird in Abschnitt 8 „Berechnungsbeispiele“ gezeigt. In den folgenden Abschnitten wird auf einige Besonderheiten eingegangen.

**6.2 Betonschwinden**

Das Betonschwinden führt zu Eigenspannungen innerhalb des Verbundquerschnitts. Die Spannungen können, wie von *Wippel* [9] und *Haensel* [10] gezeigt, mit Hilfe der in Bild 3 dargestellten Belastungsaufteilung bestimmt werden. Bild 3 geht auf Bild 4.20 in [12] zurück.

Bei der Spannungsermittlung nach Tabelle 4 ist die auf den Verbundquerschnitt wirkende Schwindkraft  $N_S$  als Druckkraft, also mit negativen Vorzeichen, einzusetzen. Als Biegemoment wirkt aufgrund des Hebelarmes  $z_c^S$

$$M_S = N_S \cdot z_c^S \tag{7}$$



**Bild 3.** Modellvorstellung zum Betonschwinden  
**Fig. 3.** Assumed model for concrete shrinkage

Die Schwindkraft  $N_S$  im Betongurt nach Bild 3a führt zu Zugspannungen

$$\sigma_c = N_S / A_c \tag{8}$$

im Beton, die zusätzlich berücksichtigt werden müssen.

**6.3 Vorspannung mit Spanngliedern**

Verbundbrücken wurden in Deutschland bis etwa 1990 in der Regel mit Spanngliedern vorgespannt. Nach dem derzeitigen Stand der Technik werden Verbundbrücken nur noch selten vorgespannt [29]. Da auch bei den Verbundträgern des Hoch- und Industriebaus die Vorspannung mit Spanngliedern unüblich ist, wird dieser Lastfall hier nicht weiter betrachtet. Die Berechnungen können nach [27] durchgeführt werden.

**6.4 Eingeprägte Verformungen**

Verbundträger können durch Anheben oder Absenken, also durch Montagemaßnahmen, vorgespannt werden. Im Hinblick auf das Kriechen handelt es sich dabei um „zeitlich konstante eingeprägte Verformungen“. Auch durch die Nachgiebigkeit von Auflagern (Pfeiler, Widerlager, Fundamente) treten in statisch unbestimmten Verbundträgern Beanspruchungen auf. Hierbei handelt es sich um „zeitlich veränderliche eingeprägte Verformungen“.

**6.5 Statisch unbestimmte Verbundträger**

Die Schnittgrößenermittlung von statisch unbestimmten Verbundträgern wird mit den Berechnungsbeispielen in Abschn. 8 ausführlich erläutert. Dabei ist zu beachten, daß die Zwangsschnittgrößen aus der statischen Unbestimmtheit in der Regel für die Zeitpunkte  $t = t_0$  und  $t = \infty$  unterschiedlich sind. Die zeitabhängigen Zwangsschnittgrößen sind dann als zeitlich veränderliche Einwirkungen („L = BT“) zu behandeln.

**7 Bestimmung der Kriechbeiwerte**

**7.1 Vorbemerkungen**

Beim Werkstoff Beton treten unter länger andauernden Beanspruchungen Kriechverformungen auf. Der Einfluß des Kriechens wird bei Verbundquerschnitten mit den Kriechbeiwerten  $\psi_N$  und  $\psi_M$  berücksichtigt, siehe dazu die Gln. (2) bis (5). Die Kriechbeiwerte hängen nicht nur vom zeitabhängigen Verhalten des Betons und von den Querschnittsverhältnissen des Verbundquerschnitts ab, sondern auch von der Art der Beanspruchung. Bei der Kriechberechnung mit dem Gesamtquerschnittsverfahren ist es erforderlich, die Kriechbeiwerte  $\psi_N$  und  $\psi_M$  vorab zu bestimmen.

Haensel hat in [10] durch Vergleich mit den Ergebnissen aus der erweiterten *Dischinger*-Gleichung Näherungsformeln für  $\psi_N$  und  $\psi_M$  abgeleitet. Bei der Herleitung der Berechnungsformeln für die Kriechbeiwerte wurde das Betonbiegemoment  $M_c(t)$  in den Gleichgewichtsbedingungen für die Teil- und Gesamtschnittgrößen vernachlässigt. Die Anwendung des Gesamtquerschnittsverfahrens nach [10] ist daher auf Verbundträger beschränkt, die eine relativ dünne Betonplatte haben.

Xia ist von den in [27] eingeführten algebraischen Quasi-Spannungs-Dehnungs-Beziehungen nach Gl. (2) ausgegangen. In [27] hat er die exakten Berechnungsformeln für die Kriechbeiwerte  $\psi_N$  und  $\psi_M$  für beliebige Verbundquerschnitte durch Verwendung der Ergebnisse, die basierend auf der allgemeinen Beziehung Gl. (1) erzielt worden sind, für die üblichen Lastfälle hergeleitet. Die Berechnungsformeln werden hier in Abhängigkeit von der Art der Einwirkungen angegeben.

**7.2 Neue Kriechbeiwerte**

Die Kriechbeiwerte hängen von der Kriechzahl  $\varphi_t$  und den Querschnittswerten nach Tabelle 1 ab. Bei der Verwendung von bezogenen Querschnittswerten erhält man mit  $\delta_{st} = A_{st} / A_{i,0}$  und  $\delta_c = A_{c,0} / A_{i,0}$  aus der Gleichung für die Fläche

$$\delta_{st} + \delta_c = 1. \tag{9}$$

Das Trägheitsmoment besteht aus drei Anteilen:

$\lambda_{st} = I_{st} / I_{i,0}$ ,  $\lambda_c = I_{c,0} / I_{i,0}$  und  $\lambda_\Delta = I_\Delta / I_{i,0}$ . Mit diesen Abkürzungen ergibt sich gemäß Tabelle 1:

$$\lambda_{st} + \lambda_c + \lambda_\Delta = 1. \tag{10}$$

Von den fünf Querschnittsparametern reichen aufgrund der Gln. (9) und (10) drei Parameter zur Erfassung der Querschnittswerte aus. Bei Verbundquerschnitten ist es zweckmäßig,  $\delta_{st}$ ,  $\lambda_{st}$  und  $\lambda_c$  als Basisparameter zu betrachten. Mit den Querschnittsparametern können die in [27] hergeleiteten Kriechbeiwerte für die unterschiedlichen Beanspruchungen formelmäßig wie folgt angegeben werden.

**Zeitlich konstante Einwirkungen durch Biegemomente**

$$\psi_N^B = \frac{1}{\varphi_t \cdot \delta_{st} \cdot \lambda_{st}} \cdot \left( \frac{1 + \lambda_\Delta \cdot \gamma_M}{\gamma_N} + \lambda_c - 1 \right) \tag{11}$$

$$\psi_M^B = \frac{1}{\varphi_t \cdot \lambda_{st}} \cdot \left( \frac{\lambda_c}{\lambda_\Delta} \cdot \frac{\lambda_\Delta \cdot \gamma_N - 1}{\gamma_M} - \lambda_c - \lambda_{st} \right) \tag{12}$$

mit

$$\gamma_N = \mu^M r_1^* + (1 - \mu^M) r_2^* \quad (13)$$

$$\gamma_M = -\frac{1}{\lambda_\Delta} [(\beta - \omega_1) \mu^M r_1^* + (\beta - \omega_2)(1 - \mu^M) r_2^*] \quad (14)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \delta_{st} \cdot \lambda_{st} - \delta_c \cdot \lambda_c) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (1 + \delta_{st} \cdot \lambda_{st} - \delta_c \cdot \lambda_c)^2 - \delta_{st} \cdot \lambda_{st}} \quad (15)$$

$$\beta = \delta_{st} \cdot (\lambda_{st} + \lambda_c) \quad \mu^M = \frac{\beta - \omega_2 - \lambda_c}{\omega_1 - \omega_2} \quad (16), (17)$$

$$r_1^* = e^{-\frac{\omega_1 \cdot \varphi_t}{1 + 0,4 \cdot \omega_1}} \quad r_2^* = e^{-\frac{\omega_2 \cdot \varphi_t}{1 + 0,4 \cdot \omega_2}} \quad (18), (19)$$

### Zeitlich veränderliche Einwirkungen durch Biegemomente

$\psi_N^{BT}$  und  $\psi_M^{BT}$  wie  $\psi_N^B$  und  $\psi_M^B$  aber mit:

$$\gamma_N = \mu^M \cdot \frac{1 - r_1^*}{\omega_1 \varphi_t} + (1 - \mu^M) \frac{1 - r_2^*}{\omega_2 \varphi_t} \quad (20)$$

$$\gamma_M = -\frac{1}{\lambda_\Delta} \left[ (\beta - \omega_1) \mu^M \frac{1 - r_1^*}{\omega_1 \varphi_t} + (\beta - \omega_2)(1 - \mu^M) \frac{1 - r_2^*}{\omega_2 \varphi_t} \right] \quad (21)$$

### Betonschwinden

$$\psi_N^S = \frac{1}{\varphi_t \cdot \delta_{st} \cdot \lambda_{st}} \cdot \left( \lambda_\Delta \cdot \frac{\gamma_M}{\gamma_N} + \frac{\lambda_{st}}{\lambda_{st} + \lambda_c} \cdot \frac{1}{\gamma_N} + \lambda_c - 1 \right) \quad (22)$$

$$\psi_M^S = \frac{1}{\varphi_t \cdot \lambda_{st}} \cdot \left( \lambda_c \cdot \frac{\gamma_N}{\gamma_M} - \lambda_c - \lambda_{st} \right) \quad (23)$$

Mit  $\psi_N$  und  $\psi_M$  wie für die Beanspruchungsart „BT“, jedoch mit  $\mu^S$  anstelle von  $\mu^M$

$$\mu^S = \mu^M + \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda_{st} + \lambda_c} \quad (24)$$

### Zeitlich konstante eingeprägte Verformungen („Absenken“)

$$\psi_N^A = \frac{1}{\varphi_t \cdot \delta_{st}} \cdot (e^{\alpha_{st} \cdot \varphi_t} - 1) \quad \text{mit} \quad \alpha_{st} = \frac{\delta_{st}}{1 + 0,4 \cdot \delta_{st}} \quad (25)$$

$$\psi_M^A = \frac{1}{\varphi_t} \cdot (e^{\alpha \cdot \varphi_t} - 1) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{1,4} \quad (26)$$

### Zeitlich veränderliche eingeprägte Verformungen („ungewollte Stützensenkungen“)

$$\psi_N^{AT} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha_{st} \cdot \varphi_t}} - \frac{1}{\delta_{st} \cdot \varphi_t} \quad (27)$$

$$\psi_M^{AT} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha \cdot \varphi_t}} - \frac{1}{\varphi_t} \quad (28)$$

mit  $\alpha_{st}$  und  $\alpha$  wie für  $\psi_N^A$  bzw.  $\psi_M^A$ .

Kriechbeiwerte, die bei Einwirkungen durch Normalkräfte zu verwenden sind, werden hier nicht angegeben. Die entsprechenden Formeln können [27] entnommen werden.

Die Formeln für die Kriechbeiwerte enthalten Exponentialfunktionen in der Form

$$r_i^* = e^{-\alpha_i \cdot \varphi_t} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (29)$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1}{1 + 0,4 \cdot \omega_1} \quad \alpha_2 = \frac{\omega_2}{1 + 0,4 \cdot \omega_2}$$

$$\alpha_3 = \frac{\delta_{st}}{1 + 0,4 \cdot \delta_{st}} \quad \alpha_4 = \frac{1}{1,4}$$

Die Funktionen  $r_i^*$  sind die dimensionslosen reduzierten Relaxationsfunktionen für einen Verbundquerschnitt. Die Funktionswerte  $r_i^*$  können mit dem in [27] angegebenen Berechnungsverfahren exakt bestimmt werden. Dabei wird der Betrachtungszeitraum in Zeitschritte unterteilt, und die Integrationen werden durch numerische Integrationen mit der Trapezformel ausgeführt. Dies erfolgte in [27] unter Verwendung der Kriechfunktion des Eurocode 2.

Mit Gl. (29) können die dimensionslosen reduzierten Relaxationsfunktionen näherungsweise ermittelt werden. Für Belastungen, die länger als drei Monate andauern, werden Ergebnisse mit sehr guter Genauigkeit erzielt. Gl. (29) wurde in [27] hergeleitet und nach eingehenden Vergleichen mit anderen Näherungsformeln empfohlen. Die mit Gl. (29) erzielte Genauigkeit entspricht den exakten Ergebnissen nach den vollständigen Lösungen für das gekoppelte Differentialgleichungssystem von Haensel [10].

### 7.3 Auswertungen

Die Kriechbeiwerte nach Abschnitt 7.2 sind im Rahmen der getroffenen Voraussetzungen die genauen Lösungen für beliebige Verbundquerschnitte. Eine Beschränkung auf Querschnitte mit „dünner“ Betonplatte ( $\lambda_c \rightarrow 0$ ) ist nicht erforderlich. Mit den neuen Kriechbeiwerten wird daher der Anwendungsbereich des Gesamtquerschnittsverfahrens erweitert.

Die Formeln für die Kriechbeiwerte in Abschn. 7.2 lassen sich mit geringem Aufwand in Tabellenkalkulations- und EDV-Programmen auswerten. Für die Handrechnung sind sie jedoch nur bedingt geeignet. Dies gilt insbesondere für die umfangreichen Formeln, die zu den Beanspruchungsarten B, BT und S gehören. In diesem Abschnitt werden daher einige Kriechwerte angegeben. Sie sollen die praktische Anwendung erleichtern und die Beurteilung der prinzipiellen Einflüsse ermöglichen.

Die Kriechbeiwerte hängen von (maximal) vier Parametern ab. Dazu gehört die Kriechzahl  $\varphi_t$ , die hier im baupraktisch relevanten Bereich von 1 bis 4 variiert werden soll. Die Querschnittsgeometrie kann mit den Parametern

$$\delta_{st} = A_{st}/A_{i,0}, \quad \lambda_{st} = I_{st}/I_{i,0} \quad \text{und} \quad \lambda_c = I_{c,0}/I_{i,0} \quad (30), (31), (32)$$

beschrieben werden. Mit den Gln. (9) und (10) erhält man  $\delta_c = 1 - \delta_{st}$  und  $\lambda_\Delta = 1 - \lambda_{st} - \lambda_c$ .

Das Auftreten von vier Parametern führt zu einer Vielzahl von Kombinationsmöglichkeiten und zu er-

heblichen Schwierigkeiten bei der Auswertung und Darstellung. Die genannte Vielzahl muß daher sinnvoll eingeschränkt werden. In [10] und [27] wurden 9 bzw. 17 unterschiedliche Querschnitte untersucht. Man erkennt, daß die Parameter bei typischen Brückenquerschnitten (hoher Stahlträger, dünne Betonplatte) etwa bei  $\delta_{st} = 0,27$ ,  $\lambda_{st} = 0,21$  und  $\lambda_c = 0,008$  liegen. Für die übliche Bandbreite von Verbundträgern des Hoch- und Brückenbaus (Stahlträger und Betonplatte oben) liegen  $\delta_{st}$  und  $\lambda_{st}$  zwischen 0,1 und 0,3.  $\lambda_c$  ist in diesen Anwendungsfällen  $< 0,1$ . Außerhalb des genannten Anwendungsbereiches treten zwei Fälle auf: Der Anteil des Stahlträgheitsmomentes  $\lambda_{st}$  ist relativ groß und reicht bis zu  $\lambda_{st} = 0,5$ . In einem zweiten Fall, der hier mit dem Stichwort „einbetonierte Stahlträger“ beschrieben werden soll, ist  $\lambda_{st}$  relativ klein, und der Anteil des Betonträgheitsmomentes ist mit  $\lambda_c$  bis zu 0,8 sehr groß.

Bevor die in Abschn. 7.2 angegebenen Berechnungsformeln für die o. g. Parameterbereiche ausgewertet werden, sollen vorab die Kriechbeiwerte nach der Literatur angesprochen werden, siehe z. B. [10], [11], [12] und [26]. Bei Vergleichen ist zu beachten, daß in dem vorliegenden Beitrag das Kriechen auf Grundlage des Eurocode 2 berücksichtigt wurde. Danach ist die früher übliche Trennung in Kriechanteile infolge verzögerter Elastizität und reines Fließkriechen nicht vorgesehen. Kriechbeiwerte, die mit oder ohne Trennung der Kriechanteile ermittelt werden, sind grundsätzlich nicht direkt miteinander vergleichbar. Dies ergibt sich aus unterschiedlichen Definitionen der Reduktionszahlen. In

Gl. (4) wird  $n_0$  als Bezugswert verwendet. Wenn dagegen die o. g. Trennung vorgenommen wird, steht dort  $n_v$ , d. h. die Reduktionszahl unter Berücksichtigung der verzögerten Elastizität.

In [12] werden Kriechbeiwerte angegeben, die für Vorberechnungen geeignet sind. Darüber hinaus sind dort auch die im Eurocode 4 Teil 2 für Verbundbrücken ohne Spanngliedvorspannung vorgesehenen Kriechbeiwerte aufgeführt. Die Werte aus [12] sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Zur Unterscheidung mit den Kriechbeiwerten in diesem Beitrag wird die Schreibweise aus [12] beibehalten,  $\psi_{F,L}$  und  $\psi_{I,L}$  entsprechen  $\psi_N^L$  und  $\psi_M^L$ .

Es folgt nun die Auswertung der Kriechbeiwerte nach Abschn. 7.2 für die o. g. Parameterbereiche.

**Zeitlich konstante Einwirkungen durch Biegemomente**

Kriechbeiwerte  $\psi_N^B$  und  $\psi_M^B$  sind in den Tabellen 6 und 7 zusammengestellt. Es stehen dort jeweils drei Werte übereinander, die für  $\lambda_c = 0,01$ , 0,1 und 0,7 gelten. Für Para-

**Tabelle 5.** Kriechbeiwerte nach [12]

**Table 5.** Creep factors according to [12]

Art der Beanspruchung	[12] Vorberechnungen				EC 4., Teil 2 Verbundbrücken			
B	$\psi_{FB} = 1,1$	$\psi_{IB} = 1,7$			$\psi_{FB} = \psi_{IB} = 1,1$			
BT	$\psi_{FBT} = 0,5$	$\psi_{IBT} = 0,7$			$\psi_{FBT} = \psi_{IBT} = 0,55$			
S	$\psi_{FS} = 0,5$	$\psi_{IS} = 0,7$			$\psi_{FS} = \psi_{IS} = 0,55$			
A	$\psi_{FA} = 1,6$	$\psi_{IA} = 4,0$			$\psi_{FA} = \psi_{IA} = 1,5$			

**Tabelle 6.** Kriechbeiwerte  $\psi_N^B$

**Table 6.** Creep factors  $\psi_N^B$

$\delta_{st}$	$\lambda_c$	$\varphi_t = 1$ $\lambda_{st}$				$\varphi_t = 2$ $\lambda_{st}$				$\varphi_t = 3$ $\lambda_{st}$				$\varphi_t = 4$ $\lambda_{st}$			
		0,1	0,2	0,3	0,5	0,1	0,2	0,3	0,5	0,1	0,2	0,3	0,5	0,1	0,2	0,3	0,5
0,1	0,01	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02	1,03	1,01	1,02	1,03	1,06	1,02	1,03	1,05	1,08
	0,10	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,02	1,00	1,01	1,02	1,04	1,00	1,02	1,03	1,07
	0,70	0,98	0,98			0,90	0,90			0,87	0,88			0,86	0,88		
0,2	0,01	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,04	1,06	1,02	1,04	1,07	1,11	1,03	1,07	1,10	1,17
	0,10	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,01	1,03	1,05	1,01	1,03	1,06	1,10	1,02	1,05	1,09	1,16
	0,70	0,98	0,99			0,92	0,93			0,90	0,93			0,90	0,94		
0,3	0,01	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,04	1,05	1,09	1,03	1,07	1,10	1,17	1,05	1,10	1,15	1,27
	0,10	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,03	1,05	1,08	1,02	1,06	1,09	1,17	1,04	1,09	1,15	1,26
	0,70	0,99	0,99			0,94	0,96			0,93	0,97			0,94	1,01		

**Tabelle 7.** Kriechbeiwerte  $\psi_M^B$

**Table 7.** Creep factors  $\psi_M^B$

$\delta_{st}$	$\lambda_c$	$\varphi_t = 1$ $\lambda_{st}$				$\varphi_t = 2$ $\lambda_{st}$				$\varphi_t = 3$ $\lambda_{st}$				$\varphi_t = 4$ $\lambda_{st}$			
		0,1	0,2	0,3	0,5	0,1	0,2	0,3	0,5	0,1	0,2	0,3	0,5	0,1	0,2	0,3	0,5
0,1	0,01	1,04	1,04	1,04	1,04	1,41	1,43	1,45	1,49	1,82	1,88	1,94	2,08	2,16	2,29	2,43	2,76
	0,10	1,04	1,04	1,04	1,04	1,38	1,40	1,42	1,46	1,76	1,81	1,88	2,01	2,08	2,20	2,34	2,66
	0,70	1,02	1,02			1,14	1,16			1,28	1,32			1,41	1,50		
0,2	0,01	1,03	1,03	1,03	1,04	1,31	1,34	1,37	1,43	1,55	1,62	1,70	1,89	1,69	1,83	1,98	2,35
	0,10	1,03	1,03	1,03	1,04	1,29	1,32	1,35	1,41	1,51	1,59	1,67	1,85	1,66	1,79	1,94	2,33
	0,70	1,02	1,02			1,12	1,15			1,22	1,29			1,32	1,45		
0,3	0,01	1,03	1,03	1,03	1,04	1,24	1,28	1,31	1,39	1,40	1,48	1,57	1,78	1,49	1,62	1,78	2,18
	0,10	1,03	1,03	1,03	1,04	1,23	1,26	1,30	1,37	1,38	1,46	1,55	1,76	1,46	1,60	1,77	2,18
	0,70	1,02	1,02			1,11	1,14			1,19	1,28			1,26	1,42		

meterkombinationen mit  $\lambda_c + \lambda_{st} \geq 1$  sind keine Werte eingetragen, da diese Kombinationen nicht zulässig sind.

Die Kriechbeiwerte  $\psi_N^B$  in Tabelle 6 liegen zwischen 0,86 und 1,27. Die kleinen Werte ergeben sich für  $\lambda_c = 0,7$ , d. h. für einbetonierte Stahlquerschnitte mit sehr hohem Betonträgheitsmoment. Für  $\lambda_c = 0,01$  und 0,1 sind die Unterschiede gering.  $\psi_{F,B} = 1,1$  nach Tabelle 5 ist im übrigen eine relativ gute Näherung, da die maximale Abweichung gegenüber den Werten in Tabelle 6 etwa 15 % beträgt. Für  $\lambda_c \leq 0,2$  können mit

$$\psi_N^B \cong 1 + 0,56 \cdot \delta_{st} \cdot \lambda_{st} \cdot (\varphi_t - 1) \quad (33)$$

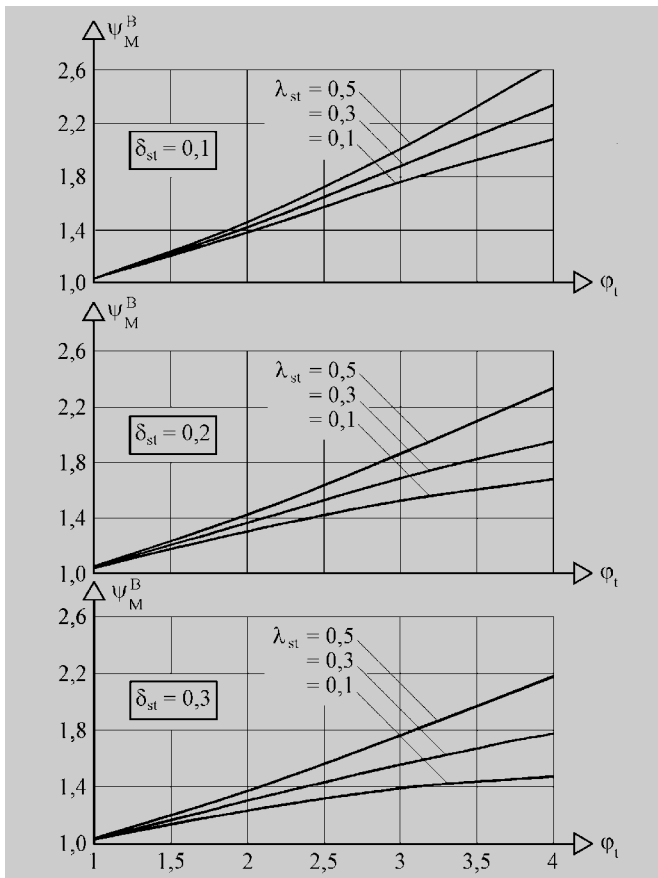
hervorragende Näherungswerte ermittelt werden.

Die Kriechbeiwerte  $\psi_M^B$  nach Tabelle 7 zeigen mit Werten zwischen 1,02 und 2,76 sehr große Unterschiede. Es fällt auf, daß sich für  $\lambda_c = 0,7$  teilweise deutlich kleinere Werte ergeben als für  $\lambda_c = 0,01$  und 0,1. Bild 4 zeigt den Verlauf von  $\psi_M^B$  in Abhängigkeit von der Kriechzahl  $\varphi_t$  für  $\lambda_c = 0,1$ .

Die Näherung mit  $\psi_{I,B} = 1,7$  in Tabelle 5 weicht prozentual von den Werten in Tabelle 7 stark ab. Der Einfluß auf das Trägheitsmoment ist jedoch bei kleinen  $\lambda_c$ -Werten gering. Für  $\lambda_c \leq 0,2$  liefert

$$\psi_M^B \cong 0,66 + 0,38 \cdot \varphi_t + 0,4 \cdot (\lambda_{st} - 2 \cdot \delta_{st}) \cdot (\varphi_t - 1) \quad (34)$$

brauchbare Näherungswerte. Bei Verbundquerschnitten mit großen  $\lambda_c$ -Werten, z. B.  $\lambda_c = 0,7$ , müssen genauere Kriechbeiwerte, z. B. nach Tabelle 7, verwendet werden,



**Bild 4.** Kriechbeiwerte  $\psi_M^B$  für  $\lambda_c = 0,1$   
**Fig. 4.** Creep factors  $\psi_M^B$  for  $\lambda_c = 0,1$

da die Abweichungen ansonsten sehr groß werden können.

**Zeitlich veränderliche Einwirkungen durch Biegemomente**

Wenn man die Kriechbeiwerte  $\psi_N^{BT}$  und  $\psi_M^{BT}$  für denselben Parameterbereich wie für die Beanspruchungsart „B“ ermittelt, ergeben sich nur geringe Unterschiede.  $\psi_N^{BT}$  liegt zwischen 0,55 und 0,91, und  $\psi_M^{BT}$  liegt zwischen 0,95 und 0,65. Bild 5 zeigt die Bandbreite der Kriechbeiwerte für  $\delta_{st}$  von 0,1 bis 0,3,  $\lambda_{st}$  von 0,1 bis 0,5 und  $\lambda_c$  von 0,01 bis 0,2.

Bei der Beanspruchungsart „BT“ sollte bedacht werden, daß der zeitliche Verlauf der Zwängungsmomente als affin zum Kriechverlauf vorausgesetzt wurde. Da dazu durchaus Abweichungen auftreten können, ist eine „übersteigerte“ Genauigkeit nicht sinnvoll. In den meisten Anwendungsfällen reicht es aus, näherungsweise die Kriechbeiwerte

$$\psi_N^{BT} = 0,65 \quad \text{und} \quad \psi_M^{BT} = 0,75 \quad (35)$$

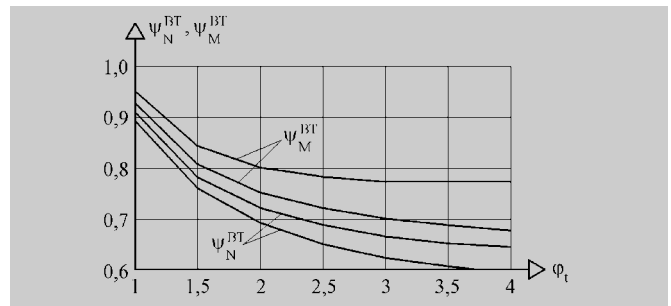
zu verwenden.

**Betonschwinden**

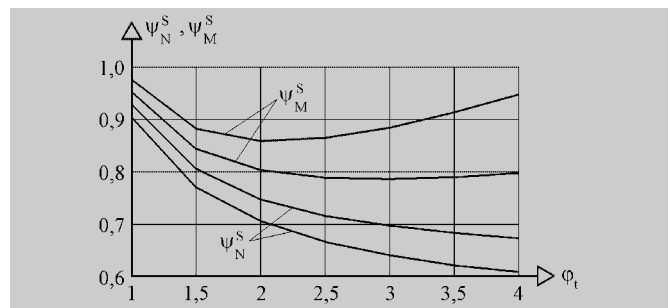
Für das Betonschwinden ergibt die Parameteruntersuchung  $\psi_N^S = 0,91$  bis 0,61 und  $\psi_M^S = 0,96$  bis 0,71. Ähnliche Überlegungen wie für die Beanspruchungsart „BT“ führen zur Empfehlung

$$\psi_N^S = 0,65 \quad \text{und} \quad \psi_M^S = 0,85. \quad (36)$$

Bild 6 zeigt die Bandbreite der Kriechbeiwerte für Querschnittsparameter, die für Bild 5 gewählt wurden.



**Bild 5.** Kriechbeiwerte  $\psi_N^{BT}$  und  $\psi_M^{BT}$   
**Fig. 5.** Creep factors  $\psi_N^{BT}$  and  $\psi_M^{BT}$



**Bild 6.** Kriechbeiwerte  $\psi_N^S$  und  $\psi_M^S$   
**Fig. 6.** Creep factors  $\psi_N^S$  and  $\psi_M^S$



**Eingeprägte Verformungen**

Die Berechnungsformeln in Abschn. 7.2 für plötzlich eingeprägte Verformungen (Absenken) und zeitlich veränderliche eingeprägte Verformungen (ungewollte Stützensenkungen) sind relativ kurz und können mit geringem Aufwand ausgewertet werden. Die Bilder 7 und 8 zeigen Auswertungen für  $\psi_N^A$  und  $\psi_M^A$ .

**7.4 Empfehlungen**

In vielen Anwendungsfällen ist es nicht erforderlich, die genauen Kriechbeiwerte nach Abschn. 7.2 zu ermitteln. Mit geeigneten Näherungen, z. B. nach Abschn. 7.3, können durchaus gute bis sehr gute Ergebnisse erzielt werden.

Von grundsätzlicher Bedeutung ist natürlich, welche Ansprüche an die Genauigkeit der Ergebnisse gestellt werden. Wie die Tabellen 2 bis 4 zeigen, ist der Einfluß der Kriechbeiwerte auf die Ermittlung von Durchbiegungen (Trägheitsmomente!), Teilschnittgrößen und Spannungen unterschiedlich, da diese Größen von den Reduktionszahlen  $n_F^L$  und  $n_I^L$  nach Gl. (4), in die die Kriechbeiwerte eingehen, abhängen. Wenn man den grundsätzlichen Einfluß der Kriechbeiwerte beurteilen möchte, ist es zweckmäßig, die Verbundquerschnittswerte wie folgt zu formulieren:

$$\frac{A_i}{A_{i,0}} = \delta_{st} + \frac{\delta_c}{1 + \psi_N \cdot \varphi_t} \tag{37}$$

$$\frac{\bar{z}_i}{\bar{z}_{i,0}} = \frac{1 + \psi_N \cdot \varphi_t}{1 + \delta_{st} \cdot \psi_N \cdot \varphi_t} \tag{38}$$

$$\frac{I_i}{I_{i,0}} = \lambda_{st} + \frac{\lambda_c}{1 + \psi_M \cdot \varphi_t} + \frac{\lambda_\Delta}{1 + \delta_{st} \cdot \psi_N \cdot \varphi_t} \tag{39}$$

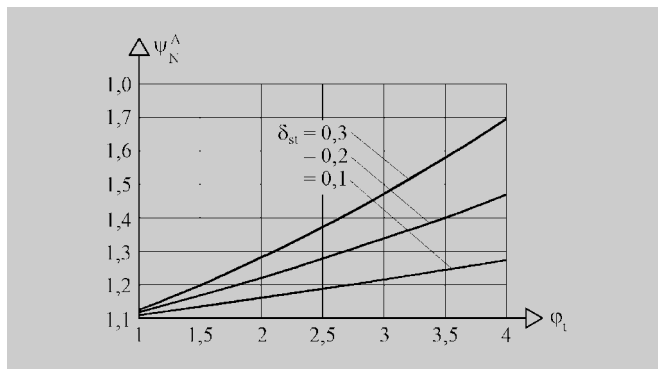
In den Gln. (37) bis (39) sind  $A_{i,0}$ ,  $\bar{z}_{i,0}$  und  $I_{i,0}$  die Querschnittswerte nach Tabelle 1 für kurzzeitige Einwirkungen und  $A_i$ ,  $\bar{z}_i$  und  $I_i$  die Querschnittswerte nach Tabelle 2. Der Kopfzeiger L wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit hier weggelassen. Mit den bezogenen, anteiligen Querschnittswerten  $\delta_{st}$ ,  $\delta_c$ ,  $\lambda_{st}$ ,  $\lambda_c$  und  $\lambda_\Delta$ , siehe auch Gln. (9) und (10), läßt sich leicht beurteilen, welchen Einfluß unterschiedliche Näherungen für  $\psi_N$  und  $\psi_M$  haben. So ist z. B. an Gl. (39) zu erkennen, daß unterschiedliche Kriechbeiwerte  $\psi_M$  bei kleinen  $\lambda_c$ -Werten nur geringen Einfluß haben. Man sollte daher stets zuerst feststellen, welche Parameter  $\delta_{st}$ ,  $\lambda_{st}$  und  $\lambda_c$  der betrachtete Verbundquerschnitt hat ( $\delta_c = 1 - \delta_{st}$  und  $\lambda_\Delta = 1 - \lambda_{st} - \lambda_c$ ).

Für  $\lambda_c \leq 0,01$  sowie  $\lambda_{st}$  und  $\delta_{st} \leq 0,3$  handelt es sich um die üblichen Verbundträger mit hohen Stahlprofilen und dünner Betonplatte. Tabelle 8 enthält eine Zusammenstellung der Kriechbeiwerte, die für  $\lambda_c = 0,1$ ,  $\lambda_{st} = 0,2$  und  $\delta_{st} = 0,27$  ermittelt wurden. Die Werte können in einem weiten Anwendungsbereich als gute Näherungen verwendet werden, der hier mit  $\lambda_c \leq 0,2$ ,  $\lambda_{st} \leq 0,5$  und  $\delta_{st} \leq 0,3$  eingegrenzt wird. Im Vergleich zu den genauen Kriechbeiwerten können durchaus nennenswerte Abweichungen auftreten. Sie haben aber in dem betrachteten Anwendungsbereich auf die Ermittlung der Querschnittswerte, Spannungen und Teilschnittgrößen nur geringen Einfluß.

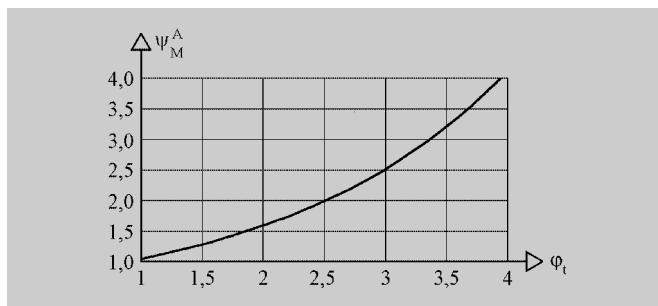
Mit Tabelle 8 ergeben sich die in Tabelle 9 zusammengestellten Reduktionszahlen in bezogener Darstellung, d. h.  $n_F/n_0$  und  $n_I/n_0$  für die verschiedenen Beanspruchungsarten.

Wenn die Querschnittsparameter außerhalb des o. g. Anwendungsbereiches liegen, ist eine genauere Ermittlung der Kriechbeiwerte erforderlich. Dies betrifft vornehmlich die Kriechbeiwerte  $\psi_N^B$  und  $\psi_M^B$ , wenn  $\lambda_c$  große Werte annimmt.

In [12], Abschn. 4.5.3.3, und [26], Abschn. 5.3.5, finden sich Formeln für Kriechbeiwerte, die mit den hier mitgeteilten Werten prinzipiell vergleichbar sind. Detaillierte Auswertungen und Vergleiche haben jedoch gezeigt, daß teilweise große Abweichungen auftreten. Dies liegt an den in [12] und [26] verwendeten Grundformeln und Querschnittsparametern. Da die in diesem Beitrag mitgeteilten Kriechbeiwerte genauer sind, wird empfoh-



**Bild 7.** Kriechbeiwert  $\psi_N^A$   
**Fig. 7.** Creep factor  $\psi_N^A$



**Bild 8.** Kriechbeiwert  $\psi_M^A$   
**Fig. 8.** Creep factor  $\psi_M^A$

**Tabelle 8.** Kriechbeiwerte für „übliche“ Verbundträger  
**Table 8.** Creep factors for „usual“ composite beams

Beanspruchungsart		$\varphi_t = 1$	$\varphi_t = 2$	$\varphi_t = 3$	$\varphi_t = 4$	
B	Zeitlich konst. Biegemomente	$\psi_N$	1,00	1,04	1,07	1,10
		$\psi_M$	1,03	1,30	1,52	1,70
S	Betonschwinden	$\psi_N$	0,90	0,71	0,65	0,62
		$\psi_M$	0,96	0,83	0,83	0,87
BT	Zeitlich veränderl. Biegemomente	$\psi_N$	0,90	0,71	0,65	0,62
		$\psi_M$	0,93	0,77	0,72	0,70
A	Absenken	$\psi_N$	1,02	1,16	1,33	1,53
		$\psi_M$	1,04	1,59	2,51	4,10
AT	Ungewollte Stützensenkung	$\psi_N$	0,92	0,74	0,70	0,68
		$\psi_M$	0,96	0,82	0,80	0,80
Anwendungsbereich: $\lambda_c \leq 0,2$ ; $\lambda_{st} \leq 0,5$ ; $\delta_{st} \leq 0,3$						

**Tabelle 9.** Reduktionszahlen für „übliche“ Verbundträger  
**Table 9.** Reduction factors for „usual“ composite beams

Beanspruchungsart			$\varphi_t = 1$	$\varphi_t = 2$	$\varphi_t = 3$	$\varphi_t = 4$
B	Zeitlich konst.	$n_F/n_0$	2,0	3,1	4,2	5,4
	Biegemomente	$n_I/n_0$	2,0	3,6	5,6	7,8
S	Betonschwinden	$n_F/n_0$	1,9	2,4	3,0	3,5
		$n_I/n_0$	2,0	2,7	3,5	4,5
BT	Zeitlich veränderl.	$n_F/n_0$	1,9	2,4	3,0	3,5
	Biegemomente	$n_I/n_0$	1,9	2,5	3,2	3,8
A	Absenken	$n_F/n_0$	2,0	3,3	5,0	7,1
		$n_I/n_0$	2,0	4,2	8,5	17,4
AT	Ungewollte	$n_F/n_0$	1,9	2,5	3,1	3,7
	Stützensenkung	$n_I/n_0$	2,0	2,6	3,4	4,2
Anwendungsbereich: $\lambda_c \leq 0,2$ ; $\lambda_{st} \leq 0,5$ ; $\delta_{st} \leq 0,3$						

len, für übliche Verbundträger die Werte nach Tabelle 8 zu verwenden und für außergewöhnliche Verbundträger die Kriechbeiwerte mit den Gln. (11) bis (28) zu ermitteln. In den Abschn. 8.1 und 8.2 werden Unterschiede anhand von Beispielen aufgezeigt.

**8 Berechnungsbeispiele**

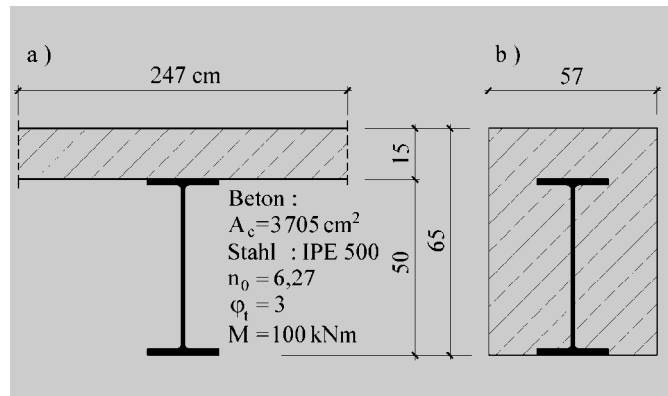
**8.1 Zwei stark unterschiedliche Verbundquerschnitte**

Die in Bild 9 dargestellten Verbundquerschnitte sind flächengleich und haben die gleiche Trägerhöhe. Sie bestehen aus einem IPE 500 und 3705 cm<sup>2</sup> Betonfläche. Während Querschnitt a) einem üblichen Verbundträger im Hochbau entspricht, handelt es sich bei Querschnitt b) um ein unsymmetrisch einbetoniertes Stahlprofil. Die unterschiedliche Querschnittsgestaltung wird durch die Parameter  $\lambda_c = 0,069$  und  $0,795$  maßgeblich gekennzeichnet, siehe Tabelle 10.

Die Querschnitte werden durch ein Biegemoment  $M = 100$  kNm beansprucht, das zeitlich konstant wirken soll. Die Querschnittswerte, Teilschnittgrößen und Span-

**Tabelle 10.** Zusammenstellung der Ergebnisse für die Querschnitte in Bild 9  
**Table 10.** Summary of the results for the cross-sections in fig. 9

	Querschnitt 1a)		Querschnitt 1b)	
	Erweitertes GQV	Bisher übliches GQV	Erweitertes GQV	Bisher übliches GQV
$\delta_{st}$		0,164		0,164
$\lambda_{st}$		0,298		0,184
$\lambda_c$		0,069		0,795
$A_{i,0}$ [cm <sup>2</sup> ]		707		707
$I_{i,0}$ [cm <sup>4</sup> ]		161705		261748
$\psi_N$	1,05	1,08 (102,9 %)	0,88	1,26 (143,2 %)
$\psi_M$	1,74	3,90 (224,1 %)	1,23	1,35 (109,8 %)
$n_F$	25,93	26,64 (102,7 %)	22,86	29,94 (131,0 %)
$n_I$	39,01	79,62 (204,1 %)	29,43	31,57 (107,3 %)
$A_i$ [cm <sup>2</sup> ]	258,9	255,1 (98,5 %)	278,1	239,8 (86,2 %)
$I_i$ [cm <sup>4</sup> ]	117604	115879 (98,5 %)	96327	92892 (96,4 %)
$\bar{z}_i$ [cm]	14,563	14,779 (101,5 %)	3,129	3,629 (116,0 %)
$N_c$ [kN]	-176,9	-177,4 (100,3 %)	-52,65	-48,34 (91,8 %)
$M_c$ [kNm]	1,514	0,753 (49,7 %)	46,01	44,48 (96,7 %)
$M_{st}$ [kNm]	40,985	41,595 (101,5 %)	50,04	51,85 (103,6 %)
$\sigma_{c,0}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	-0,641	-0,560 (87,4 %)	-1,289	-1,239 (96,1 %)
$\sigma_{st,u}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	36,51	36,87 (101,0 %)	30,49	31,08 (101,9 %)



**Bild 9.** Zwei flächen- und höhengleiche Verbundquerschnitte  
**Fig. 9.** Two composite cross-sections with equal areas and depths

nungen werden mit den Tabellen 1 bis 4 berechnet und die Kriechbeiwerte mit den Gln. (11) bis (19) ermittelt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 10 zusammengestellt.

Die Kriechbeiwerte in Tabelle 10 können mit den Tabellen 6 und 7 überprüft werden, da sie die Auswertung der genauen Formeln enthalten. Für Querschnitt a) können die Kriechbeiwerte auch nach Abschn. 7.3 näherungsweise ermittelt werden. Mit den Gln. (33) und (34) erhält man  $\psi_N^B = 1,05$  und  $\psi_M^B = 1,77$ , die mit den genauen Werten in Tabelle 10 sehr gut übereinstimmen. Mit Tabelle 8 ergeben sich etwas gröbere Näherungen:  $\psi_N^B = 1,07$  und  $\psi_M^B = 1,52$ . Wenn man die Berechnungen mit diesen Werten durchführt, ist die Genauigkeit der Ergebnisse aber dennoch gut, da  $\psi_M^B$  wegen  $\lambda_c = 0,069$  (klein!) geringen Einfluß hat.

Zum Vergleich werden in Tabelle 10 auch die Ergebnisse angegeben, die sich für die Berechnungen nach dem bisher üblichen Gesamtquerschnittsverfahren ergeben. Die Unterschiede zum erweiterten Gesamtquerschnittsverfahren resultieren aus unterschiedlichen Kriechbeiwerten. Sie werden für das bisher übliche Gesamtquerschnittsverfahren nach [12] bzw. [26] ermittelt. Die entsprechenden Formeln sind in beiden Quellen identisch. Die Kriechbeiwerte nach [12] und [26] dürfen für Querschnitt b) eigentlich nicht verwendet werden, da das Eigenträgheitsmoment des Betonteils sehr groß ist ( $\lambda_c = 0,795$ ). Zu Vergleichszwecken werden sie aber dennoch angesetzt.

Zunächst fällt auf, daß das Trägheitsmoment bei kurzzeitigen Einwirkungen für Querschnitt b) um etwa 60 % größer als für Querschnitt a) ist. Bei Berücksichtigung des Kriechens kehrt sich diese Tendenz um, und das Trägheitsmoment für a) ist etwa 20 % größer als für b).

Beim Vergleich des bisher üblichen mit dem erweiterten Gesamtquerschnittsverfahren für Querschnitt a) ergeben sich große Unter-

schiede für den Kriechbeiwert  $\psi_M$ . Die Folge sind große Unterschiede bei den Reduktionszahlen  $n_1$  und dem Biegemoment  $M_c$  im Betonteil. Bemerkenswert ist auch die mit ca. 13 % unterschiedliche Betonspannung an der Querschnittsoberkante. Die Untersuchung von Querschnitt b) zeigt nicht die für Querschnitt a) oben erwähnten großen Unterschiede. Die Spannungen ergeben sich auch mit dem bisher üblichen Gesamtquerschnittsverfahren relativ genau. Die Fläche  $A_i$  wird jedoch um etwa 14 % und die Betonnormalkraft  $N_c$  um etwa 8 % zu klein ermittelt.

**8.2 Zweifeldriger Verbundträger – Betonplatte im Zustand I**

Für den Zweifeldträger in Bild 10 sollen die Schnittgrößen und Spannungen ermittelt werden. Das Beispiel wurde [12], S. 402, entnommen. Damit ist ein direkter Vergleich zwischen dem bisher üblichen und dem hier vorgestellten erweiterten Gesamtquerschnittsverfahren möglich. Die Betonplatte wird wie in [12] über die gesamte Länge des Verbundträgers als ungerissen betrachtet.

Es werden folgende Kennwerte angenommen:

$$E_a = 21000 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_c = 3350 \text{ kN/cm}^2$$

$$\varphi_t = 2,5$$

$$\varepsilon_S = -60 \cdot 10^{-5}$$

Querschnittskennwerte des Beton- und Gesamtstahlquerschnitts:

$$A_c = 3000 \text{ cm}^2$$

$$I_c = 5,625 \text{ cm}^2 \text{ m}^2$$

$$n_0 = 6,27$$

$$A_{st} = 189 \text{ cm}^2$$

$$I_{st} = 6,416 \text{ cm}^2 \text{ m}^2$$

$$\bar{z}_{st} = 0,227 \text{ m}$$

Verbundquerschnittswerte mit  $n_0$ :

$$A_{c,0} = 3000/6,27 = 478,5 \text{ cm}^2$$

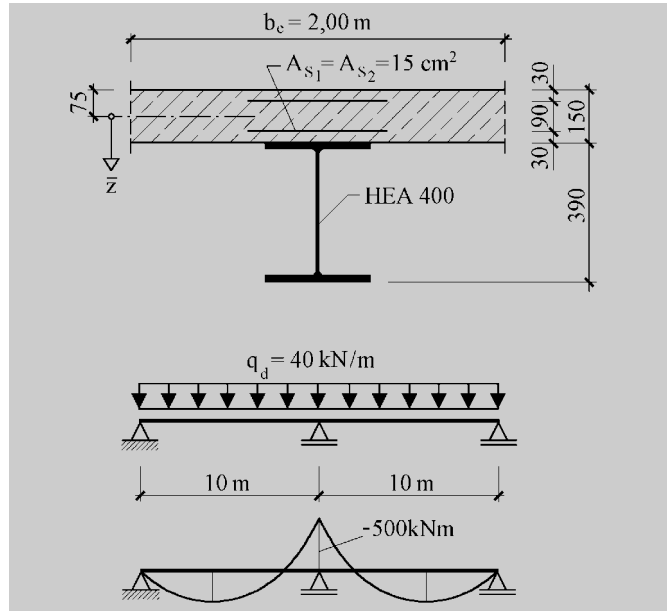
$$I_{c,0} = 5,625/6,27 = 0,897 \text{ cm}^2 \text{ m}^2$$

$$A_{i,0} = 189 + 478,5 = 667,5 \text{ cm}^2$$

$$I_{i,0} = 6,416 + 0,897 + 0,227^2 \cdot 189 \cdot 478,5/667,5 = 14,30 \text{ cm}^2 \text{ m}^2$$

$$\bar{z}_{i,0} = 189 \cdot 0,227/667,5 = 0,0643 \text{ m}$$

Die bezogenen Querschnittsparameter ergeben sich mit den Gln. (29) und (30) zu



**Bild 10.** Zweifeldträger und Querschnitt  
**Fig. 10.** Two-span continuous beam and cross-section

$$\delta_{st} = 189/667,5 = 0,283$$

$$\lambda_{st} = 6,416/14,30 = 0,449$$

$$\lambda_c = 0,897/14,30 = 0,063$$

Mit Tabelle 8 erhält man näherungsweise folgende Kriechbeiwerte:

$$\psi_N^B = 1,06 \quad \psi_N^{BT} = 0,68 \quad \psi_N^S = 0,68$$

$$\psi_M^B = 1,41 \quad \psi_M^{BT} = 0,75 \quad \psi_M^S = 0,83$$

Der Querschnittsparameter  $\lambda_{st}$  ist mit 0,449 verhältnismäßig groß. Die Näherungen für  $\psi_N^B$  und  $\psi_M^B$  nach Tabelle 8 können daher keine allzu große Genauigkeit aufweisen. Mit den Tabellen 6 und 7 erhält man 1,11 und 1,55, mit den Gln. (33) und (34) 1,11 und 1,54.

Die genauen Kriechbeiwerte nach Abschn. 7.2 sind in Tabelle 11 zusammengestellt, ebenso wie die Reduktionszahlen nach Gl. (4) und die Verbundquerschnittswerte nach Tabelle 2. Zum Vergleich finden sich in den runden Klammern die entsprechenden Werte nach [12].

Es fällt auf, daß der Kriechbeiwert  $\psi_M^B$  nach [12] mit 3,47 gegenüber 1,54 um 125 % größer ist. Dies wirkt sich beim Verbundträgheitsmoment jedoch nur um etwa 2,1 % aus, da der Anteil der Betonplatte ( $\lambda_c = 0,063$ ) gering ist.

Der Verlauf der Biegemomente infolge  $q_d = 40 \text{ kN/m}$  ist in Bild 10 skizziert. Die Berücksichtigung des Kriechinflusses ändert daran nichts, da über die Trägerlänge konstante Querschnittswerte vorausgesetzt werden.

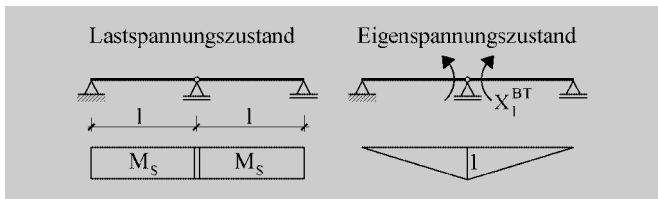
Die fiktive Schwindnormalkraft  $N_S$  und das Schwindmoment  $M_S$  erhält man mit den Gln. (7) und (8) zu

$$N_S = 60 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{6,27}{17,01} \cdot 3350 \cdot 3000 = 2223 \text{ kN}$$

$$M_S = 2223 \cdot 0,117 = 260,1 \text{ kNm}$$

**Tabelle 11.** Kriechbeiwerte, Reduktionszahlen und Querschnittswerte für das Beispiel in Bild 10  
**Table 11.** Creep factors, reduction factors and cross-section properties for the example in fig. 10

	Beanspruchungsart		
	B	BT	S
$\psi_N$	1,11 (1,19)	0,682 (0,572)	0,685 (0,527)
$\psi_M$	1,54 (3,47)	0,769 (0,675)	0,828 (0,675)
$n_F$	23,67 (24,92)	16,96 (14,53)	17,01 (14,53)
$n_I$	30,41 (60,66)	18,32 (16,85)	19,25 (16,85)
$A_i$ [cm <sup>2</sup> ]	315,7 (309,4)	365,9 (395,5)	365,4 (395,5)
$I_i$ [cm <sup>2</sup> m <sup>2</sup> ]	10,51 (10,29)	11,43 (11,83)	11,41 (11,83)
$\bar{z}_i$ [m]	0,136 (0,139)	0,117 (0,108)	0,117 (0,108)



**Bild 11.** Ermittlung der statischen Unbestimmten  $X_1^{BT}$  für das Betonschwinden  
**Fig. 11.** Determination of  $X_1^{BT}$  for concrete shrinkage

Die Berechnung der Zwangsschnittgrößen aus Schwinden für den Zeitpunkt  $t = \infty$  erfolgt nach Bild 11:

$$E_a \cdot I_i^S \cdot \delta_{10} = 2 \cdot 1/2 \cdot 260,1 \cdot 1,0 \cdot 10 = 2601 \text{ kNm}^2$$

$$E_a \cdot I_i^{BT} \cdot \delta_{11} = 2 \cdot 1/3 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot 10 = 6,667 \text{ m}$$

$$X_1^{BT} = - \frac{2601}{6,667} \cdot \frac{11,43}{11,41} = -390,8 \text{ kNm} (-421,5)$$

Die Spannungen können nun mit Hilfe von Tabelle 4 berechnet werden. Tabelle 12 enthält eine Zusammenstellung der Ergebnisse und Vergleiche mit [12]. Man erkennt, daß die Spannungen in der Betonplatte um bis zu 31,3 % und im Stahlträger um bis zu 10,2 % abweichen. Die Unterschiede sind auf die Vernachlässigung der Teilschnittgröße  $M_c(t)$  in der Gleichgewichtsbedingung bei Herleitung des bisher üblichen Gesamtquerschnittsverfahrens und auf die Näherungsformeln für die Kriechbeiwerte zurückzuführen.

Ein Vergleich der Trägheitsmomente in Tabelle 11 mit den Werten in [12] zeigt Abweichungen bis zu 3,6 %. Die Unterschiede der beiden Verfahren wirken sich daher bei diesem Beispiel auf die Ermittlung von Durchbiegungen nur geringfügig aus.

**Tabelle 12.** Vergleich der Spannungen [kN/cm<sup>2</sup>]  
**Table 12.** Comparison of stresses [kN/cm<sup>2</sup>]

	Ständige Lasten				Schwinden			
	$\sigma_{c0}$	$\sigma_{cu}$	$\sigma_{st0}$	$\sigma_{stu}$	$\sigma_{c0}$	$\sigma_{cu}$	$\sigma_{st0}$	$\sigma_{stu}$
Erweitertes GQV	0,39	0,16	2,90	-15,65	0,51	0,41	-5,61	-10,05
bisher üb. GQV, [12]	0,33	0,21	3,11	-15,84	0,56	0,45	-6,18	-10,80
Relative Fehler %	-15,40	31,30	7,20	1,20	9,80	7,80	10,20	7,50

GQV: Gesamtquerschnittsverfahren

### 8.3 Ermittlung der Schnittgrößen unter Berücksichtigung der Rißbildung

In diesem Abschnitt sollen die Schnittgrößen in demselben Verbundträger (siehe Bild 10) unter Berücksichtigung der Rißbildung im Bereich der Mittelstütze ermittelt werden. Für die näherungsweise Berechnung der Schnittgrößen bei Berücksichtigung der Rißbildung wird wie in [12] jeweils über 15 % der angrenzenden Stützweite die Steifigkeit des reinen Zustand-II-Querschnitts  $E_a I_2 = E_a I_{st}$  angesetzt, siehe hierzu z. B. Bild 12.

Die Berechnung der  $\delta_{ik}$ -Zahlen, d. h. die Auswertung der Integrale unter Berücksichtigung der bereichsweise unterschiedlichen Steifigkeiten, erfolgt mit den in [12] angegebenen Formeln. Danach erhält man für die verschiedenen Biegemomentenverläufe:

- Dreieck/Parabel:  $0,294 + 0,039 \cdot I_1/I_2$
- Dreieck/Dreieck:  $0,204 + 0,129 \cdot I_1/I_2$
- Dreieck/Rechteck:  $0,361$  (für  $M = 0$  im Bereich von  $I_2$ )

Ermittlung der Schnittgrößen für den Zeitpunkt  $t_0$  (Bild 12):

Mit  $I_1/I_2 = I_{i,0}/I_{st} = 2,23$  erhält man:

$$E_a \cdot I_{i,0} \cdot \delta_{10} = 2 \cdot 1,0 \cdot 500 \cdot (0,294 + 0,039 \cdot 2,23) \cdot 10 = 3809,7 \text{ kNm}^2$$

$$E_a \cdot I_{i,0} \cdot \delta_{11} = 2 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot (0,204 + 0,129 \cdot 2,23) \cdot 10 = 9,83 \text{ m}$$

$$X_{1,0} = - \frac{3809,7}{9,83} = -387,6 \text{ kNm}$$

Ermittlung der Schnittgrößen für den Zeitpunkt  $t = \infty$ :

Die Berechnung der Zwangsschnittgrößen aus Dauerlast wird mit Bild 13 erläutert. Mit  $I_1/I_2 = I_i^B/I_{st} = 1,638$  und  $I_1/I_2 = I_i^{BT}/I_{st} = 1,781$  erhält man:

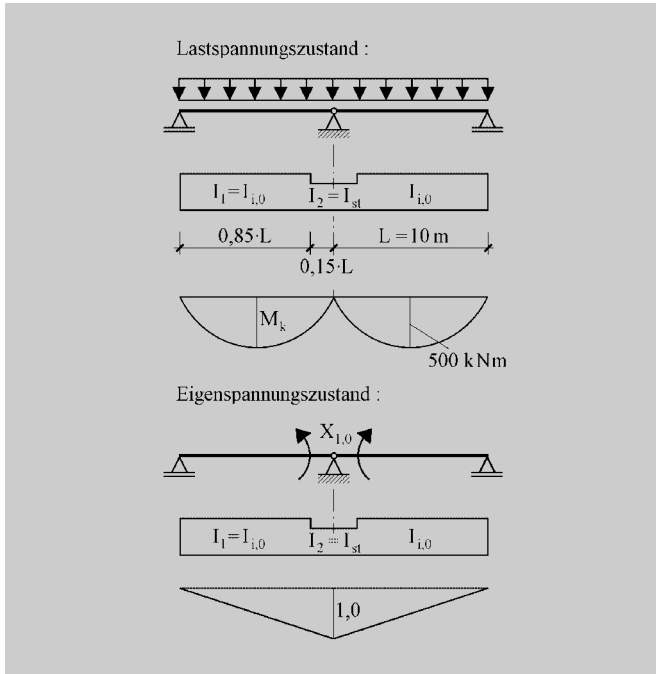
$$E_a \cdot I_i^B \cdot \delta_{10} = 2 \cdot 1,0 \cdot 500 \cdot (0,294 + 0,039 \cdot 1,638) \cdot 10 - 2 \cdot 1,0 \cdot 387,6 \cdot (0,204 + 0,129 \cdot 1,638) \cdot 10 = 359,4 \text{ kNm}^2$$

$$E_a \cdot I_i^{BT} \cdot \delta_{11} = 2 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot (0,204 + 0,129 \cdot 1,781) \cdot 10 = 8,67 \text{ m}$$

$$X_1^{BT} = - \frac{359,4}{8,67} \cdot \frac{11,43}{10,51} = -45,1 \text{ kNm} (-49,5)$$

Stützmoment für den Zeitpunkt  $t = \infty$ :

$$X_1 = X_{1,0} + X_1^{BT} = -387,6 - 45,1 = -432,7 \text{ kNm} (-437,1)$$



**Bild 12.** Schnittgrößenberechnung zur Zeit  $t_0$   
**Fig. 12.** Calculation of internal forces at time  $t_0$

Beim Vergleich mit dem in [12] für das Beispiel errechneten Zwangsmoment an der Mittelstütze (Klammerwert) erkennt man, daß das mit dem bisher üblichen Gesamtquerschnittsverfahren ermittelte Stützmoment nur geringfügig abweicht, obwohl der relative Fehler für die Änderung der Zwangsschnittgrößen bei etwa 10 % liegt.

Für die Berechnung der Zwangsschnittgrößen aus Schwinden wird im Bereich von  $I_2$  wie in [12]  $M_s = 0$  angesetzt. Mit  $I_1/I_2 = I_1^S/I_{st} = 1,778$  und  $I_1/I_2 = I_1^{BT}/I_{st} = 1,781$  erhält man:

$$E_a \cdot I_1^S \cdot \delta_{10} = 2 \cdot 1,0 \cdot 260,1 \cdot 0,361 \cdot 10 = 1877,9 \text{ kNm}^2$$

$$E_a \cdot I_1^{BT} \cdot \delta_{11} = 2 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot (0,204 + 0,129 \cdot 1,781) \cdot 10 = 8,67 \text{ m}$$

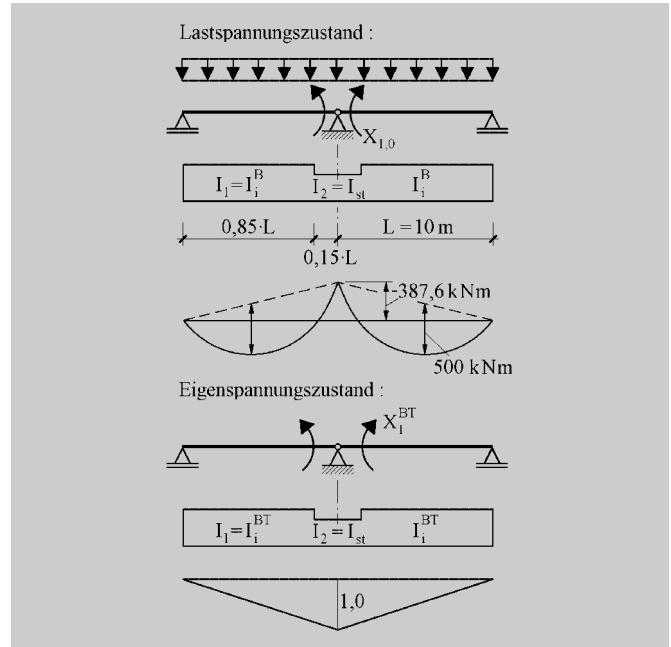
$$X_1^{BT} = - \frac{1877,9}{8,67} \cdot \frac{11,43}{11,41} = - 217,0 \text{ kNm} \quad (- 229,8)$$

Der relative Fehler liegt in diesem Fall bei 9 %. Man erkennt, daß die Berechnungen nach dem bisher üblichen Gesamtquerschnittsverfahren etwas zu große zeitabhängige Zwangsschnittgrößen liefern.

### 9 Danksagungen

Im vorliegenden Beitrag wird über die Ergebnisse eines Forschungsvorhabens berichtet, das am Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt wurde. Die Verfasser danken der Konrad-Adenauer-Stiftung, Sankt Augustin, für die finanzielle Förderung des Forschungsvorhabens durch Gewährung eines Stipendiums für Herrn Xia.

Herrn Dipl.-Ing. Jörg Laumann sei an dieser Stelle herzlich für die programm-technische Umsetzung der Berechnungsformeln und seine Hilfe bei den Auswertungen gedankt.



**Bild 13.** Berechnung der Zwangsschnittgrößen aus Dauerlast  
**Fig. 13.** Calculation of the secondary bending moments due to sustained load

### Literatur

- [1] *Dischinger, E.*: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. Der Bauingenieur 18 (1937), H. 33/34, S. 487, H. 35/36, S. 538, H. 39/40, S. 595.
- [2] *Dischinger, E.*: Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken. Der Bauingenieur 20 (1939), H. 5/6, S. 53.
- [3] *Sontag, H. J.*: Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen von Verbundträgern. Dissertation, Techn. Hochschule Karlsruhe, 1951.
- [4] *Neunert, B.*: Der Einfluß des Kriechens und Schwindens auf vorgespannte Stahlbetonteile. Dissertation, Techn. Universität Berlin, 1953.
- [5] *Kunert, K.*: Beitrag zur Berechnung von Verbundkonstruktionen. Dissertation, Techn. Universität Berlin, 1955.
- [6] *Sattler, K.*: Theorie der Verbundkonstruktionen (Band I und II). Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1959.
- [7] *Blaszakowiak, St.*: Einfluß des Kriechens beim Stahl-Vollwand-Verbundträger, erfaßt durch  $n(\varphi) = E_e/E_{b\varphi}$ . Bautechnik, 1958, S. 96.
- [8] *Fritz, B.*: Verbundträger: Berechnungsverfahren für die Brückenbaupraxis. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.
- [9] *Wippel, H.*: Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.
- [10] *Haensel, J.*: Praktische Berechnungsverfahren für Stahlträgerverbundkonstruktionen unter Berücksichtigung neuerer Erkenntnisse zum Betonzeitverhalten. Techn.-wissenschaftl. Mitteilung, Nr. 75-2, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, März 1975.
- [11] *Haensel, J.*: Kriechen und Schwinden des Betons in Stahlträger-Verbundkonstruktionen. Zerna-Festschrift, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1976.
- [12] *Roik, K., Bergmann, R., Haensel, J., Hanswille, G.*: Verbundkonstruktionen – Bemessung auf der Grundlage des Eurocode 4 Teil 1. Betonkalender 1999 Teil II, Ernst & Sohn, Berlin.

- [13] *Trost, H.*: Zur Berechnung von Stahlverbundträgern im Gebrauchszustand auf Grund neuerer Erkenntnisse des viskoelastischen Verhaltens des Betons. *Der Stahlbau* (1968), H. 11, S. 321.
- [14] *Mainz, B., Wolff, H. J.*: Zur Berechnung von Spannungumlagerungen in statisch unbestimmten Stahlverbundtragwerken. *Der Stahlbau* (1972), H. 2, S. 45.
- [15] *Frey, J.*: Zur Berechnung von vorgespannten Stahl-Verbundtragwerken im Gebrauchszustand. *Der Stahlbau* 54 (1985).
- [16] *Beisel, Th.*: Beitrag zur Berechnung von Verbundkonstruktionen unter Verwendung normierter Eigenspannungszustände. Dissertation, RWTH Aachen, 1985.
- [17] *Trost, H.*: Spannungsdehnungsgesetz eines viskoelastischen Festkörpers wie Beton und Folgerungen für Stabtragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton. *Beton* (1966), H. 6, S. 233.
- [18] *Trost, H.*: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. *Beton- und Stahlbetonbau* 62 (1967), H. 10, S. 230, H. 11, S. 261.
- [19] *Zerna, W., Trost, H.*: Rheologische Beschreibung des Werkstoffes Beton. *Beton- und Stahlbetonbau* 62 (1967), H. 7, S. 165.
- [20] *Bazant, Z. P.*: Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method. *ACI Journal*, No. 4, pp 212–217, 1972.
- [21] CEB-FIP: Model Code for Concrete Structures. Paris, London, Berlin, 1978.
- [22] DIN 4227 Teil 1: Spannbeton. Ausgabe Dezember 1979 und Juli 1988.
- [23] Eurocode 2: Design of Concrete Structures, Part 1: General Rules and Rules for Buildings. Revised Draft, Dec. 1990.
- [24] Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures, Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings. Revised Draft, March 1992. Part 2: Composite Bridges. Final Draft, May 1997.
- [25] DIN 18800 Teil 5: Verbundtragwerke aus Stahl und Beton, Bemessung und Konstruktion. 5. Entwurf Mai 1997.
- [26] *Bode, H.*: Euro-Verbundbau: Konstruktion und Berechnung (2. Auflage). Werner Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [27] *Xia, G.*: Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Verbundkonstruktionen unter Berücksichtigung des zeitabhängigen Betonverhaltens. Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahl- und Verbundbau, Band 7, Ruhr-Universität Bochum, März 1999.
- [28] *Xia, G., Kindmann, R.*: A Method for the Creep Analysis of Composite Cable-Stayed Bridges. IABSE Conference, Malmö 1999.
- [29] *Kindmann, R., Krahwinkel, M.*: Stahl- und Verbundkonstruktionen. Teubner-Verlag, Stuttgart 1999.

#### Autoren dieses Beitrages:

Prof. Dr.-Ing. Rolf Kindmann und Dr.-Ing. Gan Xia, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau, Universitätsstraße 150, 44801 Bochum

## Bürokomplex mit Aluminiumdächern

An der Münchener Leopoldstraße wurde Anfang des Jahres ein neuer Bürokomplex fertiggestellt, dessen Aluminiumdächer das Erscheinungsbild prägen.

Konstruiert wurden die weithin sichtbaren Tonnendächer mit den Gauben aus KAL-ZIP, dem industriell gefertigten Stehfalzdach. Rund 2300 m<sup>2</sup> Aluminiumprofile waren nötig, um die Dächer der beiden ineinander verschränkten, L-förmigen Gebäude zu decken. Eine besondere Herausforderung für die Monteure: Die Aluminiumprofile mußten wegen des engen Radius der Tonnendächer – stellenweise nur 7,5 m – sehr stark gebogen werden. Noch stärker ist die Krümmung der Gaubendächer: Ihr Radius beträgt sogar nur 4 m.

Das repräsentative Gebäudeensemble befindet sich einer Top-Lage der Münchener City. Die beiden vier- bzw. fünfgeschossigen Gebäudeteile (hinzu kommt jeweils ein ausgebauter Dachgeschoß) haben zusammen eine Grundrißfläche von über 14200 m<sup>2</sup>. In der Tiefgarage stehen 123 Stellplätze zur Verfügung. Ein bemerkenswertes Detail: Jeder der beiden Trakte verfügt über zwei voneinander unabhängige Treppenhäuser. Vorteil dieser Anordnung: Ein Hauptmieter, der mehrere Etagen an-

mietet, erhält seinen eigenen Zugang – alle anderen Büroräume können über das zweite Treppenhaus betreten wer-

den. Der Entwurf für den Bürokomplex stammt vom Münchener Architekten *Herbert Killinger*.



Hervorstechendes architektonisches Merkmal des Bürokomplexes – silbern schimmernde Tonnendächer  
(Foto: Hoogovens Aluminum Bausysteme GmbH)